Košický Matboj

Košice, 27. 10. 2022

1. časť

Úloha 1.1: V rade stojí 99 ľudí, z toho 98 klamárov a 1 pravdovravec. Klamári vždy klamú a pravdovravec vždy hovorí pravdu. Prvý človek v rade povie: „Medzi prvými 40 ľuďmi je pravdovravec.“ Posledný človek v rade povie: „Medzi poslednými 40 ľuďmi je pravdovravec.“ Prostredný (50.) človek v rade povie: „Ja som pravdovravec.“ Na koľkých rôznych pozíciách môže byť pravdovravec?

Výsledok: 21

Riešenie: Všetky tri výroky mohol za určitých podmienok povedať aj pravdovravec, aj klamár, takže žiadnu pozíciu v rade nemôžeme hneď vylúčiť. Rozoberme preto 4 typy pozícií, na ktorých môže stáť pravdovravec.

Ako prvú si prejdime možnosť, keď je pravdovravec v strede radu (50. pozícia). V takom prípade prvých 40 aj posledných 40 ľudí v rade sú klamári, čo je v súlade s výrokmi prvého a posledného človeka (obaja sú klamári).

Teraz sa pozrime na pozície v rade, o ktorých nič nevieme (41. – 49. a 51. – 59. pozícia). Ak by na niektorej z týchto pozícií bol pravdovravec, všetky tri výroky povedali klamári a hovoria iba o klamároch. Tu taktiež nenachádzame spor, a teda pravdovravec môže stáť aj na týchto pozíciách.

Ďalej sa zamerajme na 2. - 40. a 60. - 98. pozíciu. O nich hovorí prvý alebo posledný človek v rade, no ľudia na týchto pozíciách nepovedali nič. Ak by bol pravdovravec niekde na 2. - 40. pozícii, potom prvý človek v rade hovorí pravdu, no v rade stojí iba jeden pravdovravec. Rovnaký spor nastáva, ak je pravdovravec na 60. - 98. pozícii - druhým pravdovravcom by bol posledný človek v rade. Na týchto pozíciách teda pravdovravec nemôže stáť.

Nakoniec potrebujeme overiť, či môže byť pravdovravec prvý alebo posledný v rade. Ak by bol prvý, tak sú všetky tri výroky v poriadku. Rovnako to je aj v prípade, že je pravdovravec posledným v rade.

Z našich úvah vyplýva, že pravdovravec môže stáť v rade na $1 + 2 \cdot 9 + 2 = 21$ rôznych pozíciách.

Úloha 1.2: Majme pravouhlý trojuholník, ktorého dlhšia odvesna má dĺžku 24 cm. Dĺžka tejto dlhšej odvesny je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch dĺžok strán. Aký je súčet všetkých možných dĺžok, ktoré môže nadobúdať kratšia odvesna?

Výsledok: 18 cm

Riešenie: Vieme, že dĺžka dlhšej odvesny je aritmetickým priemerom dvoch zvyšných strán, označíme si preto rozdiel dĺžok medzi odvesnami ako x. Následne, keďže ide o pravouhlý trojuholník, dosadíme do Pytagorovej vety a dostávame:

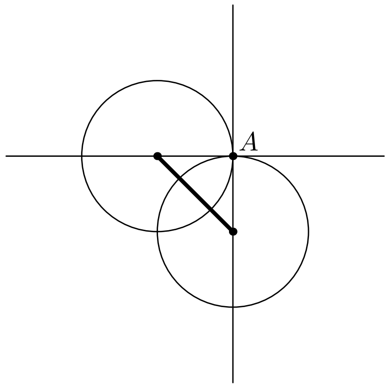
$$\begin{aligned}(24-x)^2+24^2 &= (24+x)^2\\ 24^2-48x+x^2+24^2 &= 24^2+48x+x^2\\ 24^2 &= 96x\\ 24 &= 4x\\ 6 &= x\end{aligned}$$

Rovnica má jediné riešenie, čo znamená, že existuje iba jeden trojuholník, ktorý vyhovuje zadaniu. Kratšia odvesna tohto trojuholníka bude dlhá $24 - 6 = 18$ cm.

Úloha 1.3: V rovine sú dané dve kružnice s polomerom 1 a spoločným bodom A. Dotyčnice k nim v bode A sú na seba kolmé. Aká je vzdialenosť stredov týchto kružníc?

Výsledok: $\sqrt{2}$

Riešenie: Bod A je jedným z dvoch priesečníkov našich kružníc. Keďže dotyčnica ku kružnici je kolmá na jej polomer, tak v našom prípade bude polomer (a teda aj stred) jednej kružnice ležať na dotyčnici k druhej a polomer (a teda aj stred) druhej bude ležať na dotyčnici k prvej tak, ako na obrázku. Z obrázka už jednoducho vidíme, že hľadáme dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka. Hľadanú dĺžku vypočítame pomocou Pytagorovej vety. Keďže dĺžka oboch odvesien je 1, tak dĺžka prepony je $\sqrt{2}$.



Úloha 1.4: Martin má piatich synov, ktorí majú postupne 1, 2, 3, 4 a 5 rokov a žiadnemu z nich sa najbližšie 2 dni nezmení vek. Na tieto dva dni im chce rozdeliť 34 cukríkov. Každý večer zje každé dieťa toľko svojich cukríkov, koľko má rokov. Okrem toho dá na druhý deň ráno (teda medzi dvoma večermi, kedy deti jedia cukríky) najstaršie dieťa najmladšiemu toľko cukríkov, koľko ich vtedy má najmladšie dieťa. Koľko možností má Martin na to, ako deťom cukríky rozdeliť tak, aby každé dieťa oba večery mohlo zjesť toľko cukríkov, koľko má rokov?

Výsledok: 24

Riešenie: Pozrime sa najprv na najmladšieho z Martinových synov. Ak by dostal menej ako 2 cukríky, mal by v druhý deň ráno 0 cukríkov, takže by žiaden nedostal a nemal by večer čo zjesť. Rovnako vieme, že aj ostatní synovia museli dostať aspoň dvakrát toľko cukríkov, koľko majú rokov. To je dokopy $2+4+6+8+10=30$ cukríkov. Ostáva spočítať, koľkými spôsobmi mohol Martin rozdeliť zvyšné 4 cukríky. Pozrime sa na to, koľko cukríkov mohol dostať najmladší syn:

- Ak najmladší syn dostal 2 cukríky, tak na druhý deň ráno mal 1 cukrík. Najstarší syn musel v tom čase mať aspoň 6 cukríkov, takže na začiatku ich mal aspoň 11 (10, ktoré sám zjedol a 1, ktorý dal najmladšiemu). Zvyšné 3 cukríky mohli byť rozdelené medzi 4 najstarších synov ľubovoľne. Buď jeden z nich dostal všetky 3 cukríky (4 možnosti) alebo jeden z nich dostal 2 a niekto iný 1 cukrík (2 cukríky dostal jeden zo 4 synov a 1 cukrík jeden zo zvyšných 3 synov, dokopy $3\cdot 4=12$ možností) alebo jeden z nich nedostal nič a zvyšní traja dostali po jednom cukríku (opäť 4 možnosti). Dokopy dostávame v tomto prípade $4+12+4=20$ možností.

- Ak najmladší syn dostal 3 cukríky, tak na druhý deň ráno mal 2 cukríky. Najstarší syn musel potom dostať aspoň 12 cukríkov. Zvyšný cukrík mohol dostať ktorýkoľvek zo štyroch najstarších synov, spolu 4 možnosti.

- Ak by najmladší syn dostal viac ako 3 cukríky, tak by najstarší syn musel dostať aspoň 13 cukríkov. V tom prípade by Martin ale potreboval aspoň $4+4+6+8+13=35$ cukríkov, takže tieto možnosti už nevyhovujú.

  Dokopy existuje $20+4=24$ možností, ako môže Martin cukríky rozdeliť vyhovujúcim spôsobom.

Úloha 1.5: Kladné celé číslo je rôznorodé, ak neobsahuje dve rovnaké cifry a neobsahuje nulu. Nájdite najväčšie prvočíslo, ktoré delí bezo zvyšku súčet všetkých rôznorodých štvorciferných kladných celých čísel.

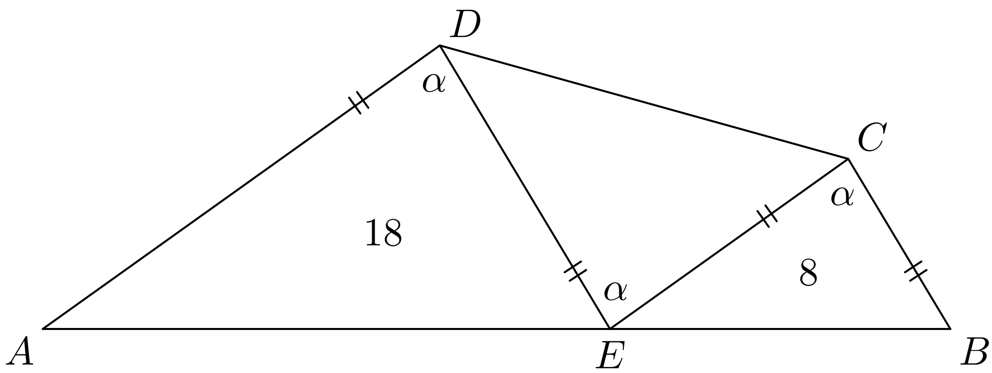
Výsledok: 101

Riešenie: Tento súčet nájdeme ako všetky výskyty cifry 1 + všetky výskyty cifry 2 + ... + všetky výskyty cifry 9. Poďme spočítať koľko do súčtu prispejú napr. výskyty čísla 9. Existuje $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ možných štvorciferných rôznorodých čísel obsahujúcich 9 na mieste tisícok. Analogicky existuje 336 takých čísel s cifrou 9 na mieste stoviek, desiatok a jednotiek. Výskyty cifry 9 teda zvyšujú finálny súčet o $9 \cdot (1000+100+10+1) \cdot 336$. Rovnako to platí pre cifry $1, 2, \ldots 8$. Teda celkový súčet rôznorodých štvorciferných čísel môžeme vyjadriť ako $(1+2+\cdots+9) \cdot 1111 \cdot 336 = 45 \cdot 1111 \cdot 336 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 101$ Z toho už môžeme jasne vidieť, že najväčší prvočíselný deliteľ v rozklade súčtu všetkých štvorciferných rôznorodých čísel je 101.

Úloha 1.6: Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom E vnútri strany AB tak, že platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne 18 a 8. Určte obsah trojuholníka ECD.

Výsledok: 12

Riešenie: Keďže $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC|$, tak AD a EC sú rovnobežné. Podobne keďže $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB|$, tak CB a DE sú rovnobežné. Potom trojuholníky AED a EBC sú podobné s koeficientom podobnosti $\sqrt{18}/\sqrt{8}$, keďže ich obsahy sú v pomere 18/8. Špeciálne $DE/CB = \sqrt{18}/\sqrt{8}$. Keďže CB a DE sú rovnobežky, tak výška na stranu CB v trojuholníku ECB je rovnako veľká ako výška na stranu DE v trojuholníku EBC. Potom pomer obsahu DEC ku obsahu ECB je rovný $\sqrt{18}/\sqrt{8}$, z čoho obsah trojuholníka DEC je $\sqrt{18} \cdot 8/\sqrt{8} = 12$.



Úloha 1.7: Máme 3 modré, 3 červené a 3 žlté kocky. Modré kocky sú zaradom očíslované číslami 1, 2, 3. Rovnako sú očíslované aj červené a žlté kocky. 3 kocky tvoria set, ak platí aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

- Všetky majú rovnakú farbu.
- Všetky majú rovnaké číslo.
- Všetky majú navzájom rôzne farby.
- Všetky majú navzájom rôzne čísla.

Chceme postaviť vežu z 3 kociek, ktoré tvoria set. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť?

Výsledok: 288

Riešenie: Hľadaný počet spôsobov vyjadríme ako rozdiel počtu veží z kociek, ktoré netvoria set, od počtu všetkých možných veží.

- Aby trojica kociek netvorila set, musia kocky v nej byť práve dvoch farieb a práve dvoch hodnôt. Ak by sme chceli skonštruovať unikátnu vežu, postupujeme takto: Najprv vyberieme trojicu kociek:

  1. Vyberieme dvojicu farieb z trojčlennej množiny farieb {modrá, červená, žltá}, čo je to isté, ako zvoliť farbu, ktorá na kockách nebude, teda vyberáme 1 prvok z trojice. Na tento výber máme 3 možnosti.
  2. Zo zvolenej dvojice farieb vyberieme tú, ktorá bude na dvoch kockách. Na to máme 2 možnosti.
  3. Vyberieme dvojicu hodnôt z množiny $\{1, 2, 3\}$. Rovnakou úvahou ako v bode 1 zistíme, že na tento výber máme 3 možnosti.
  4. Zo zvolenej dvojice čísel vyberieme to, ktoré bude na dvoch kockách. Rovnako ako v bode 2 máme na tento výber 2 možnosti.

  Ak majú dve kocky rovnakú farbu, majú rôzne čísla. Ak majú dve kocky rovnaké čísla, majú rôznu farbu. Preto nám predchádzajúce 4 kroky výberu jednoznačne určili trojicu kociek, ktoré netvoria set. Máme teda $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ rôznych trojíc, ktoré netvoria set.

  Potom z vybranej trojice kociek skonštruujeme vežu. Na to máme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností (na prvé poschodie zvolíme 1 z 3 vybraných kociek, na druhé poschodie zvolíme 1 zo zvyšných dvoch kociek, na tretie poschodie už nám zvýšila iba 1 kocka).

  Spolu máme $36 \cdot 6 = 216$ možností, ako postaviť vežu z kociek, ktoré netvoria set.

- Celkový počet všetkých možných veží je $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ (na prvé poschodie zvolíme 1 kocku zo všetkých 9 kociek, na druhé poschodie zvolíme 1 kocku zo zvyšných 8 kociek, na tretie poschodie zvolíme 1 kocku zo zvyšných 7 kociek).

Celkovo môžeme postaviť $504 - 216 = 288$ rôznych veží z kociek, ktoré tvoria set.

Úloha 1.8: Funkcia $f(x)$ spĺňa $f(3x) = 3f(x)$ pre všetky reálne x. Tiež platí $f(x) = 1 - |x - 2|$ pre x z intervalu $[1, 3]$. Nájdite najmenšie kladné x, pre ktoré platí $f(x) = f(2022)$.

Výsledok: 408

Riešenie: Môžeme si všimnúť, že na intervale $[1, 2]$ má f predpis $f(x) = x - 1$ a na intervale $[2, 3]$ má predpis $f(x) = 3 - x$. Z vlastnosti $f(3x) = 3f(x)$ môžeme vidieť, že táto funkcia vyzerá podobne aj pre väčšie x, konkrétne pre každé celé kladné n je na intervale $[3^n, 2 \cdot 3^n]$ v tvare $f(x) = x - 3^n$ a na intervale $[2 \cdot 3^n, 3^{n+1}]$ je v tvare $f(x) = 3^{n+1} - x$. Správnosť tohto predpisu môžeme ľahko overiť aj indukciou podľa n. Ak tvrdenie platí pre všetky $x \in [3^n, 2 \cdot 3^n]$, tak potom pre $x \in [3^{n+1}, 2 \cdot 3^{n+1}]$ je $f(x) = 3f(\frac{x}{3}) = 3 \cdot \frac{x}{3} - 3^{n+1}$, analogicky aj pre druhý interval. Maximum na intervale $[3^n, 3^{n+1}]$ je $f(2 \cdot 3^n) = 3^n$.

Poďme najprv zistiť $f(2022)$. 2022 leží medzi $2 \cdot 3^6$ a 3^7, takže $f(2022) = 3^7 - 2022 = 2187 - 2022 = 165$. Teraz už iba stačí nájsť najmenšie x také, že $f(x) = 165$. Keďže $3^4 < 165 < 3^5$, tak najmenšie také x bude na intervale $[3^5, 2 \cdot 3^5]$, keďže pre menšie x je maximum hodnota 3^4. Vieme, že na tomto intervale platí $f(x) = x - 3^5 = x - 243$, takže hľadané x je $165 + 243 = 408$.

Úloha 1.9: Z množiny čísel $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 14\}$ chceme vybrať päťčíselnú podmnožinu tak, aby aspoň dve čísla boli po sebe idúce. Koľko takýchto rôznych podmnožín vieme vybrať?

Výsledok: 1750

Riešenie: Keď chceme vybrať 5 čísel zo 14 tak použijeme kombinačné číslo $\binom{14}{5} = \frac{14!}{5! \cdot 9!} = 2002$. Problém však je, že nie všetky takto vybrané pätice obsahujú dvojicu po sebe idúcich prvkov – musíme preto od výsledku odrátať všetky možnosti, kedy to nenastáva. Chceme teda zrátať počet všetkých takých pätíc, kde žiadne dve čísla nie sú po sebe idúce.

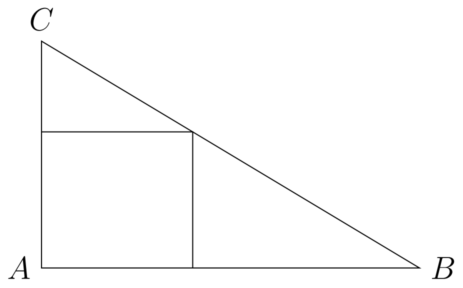
Pomôžme si nasledujúcou úvahou:

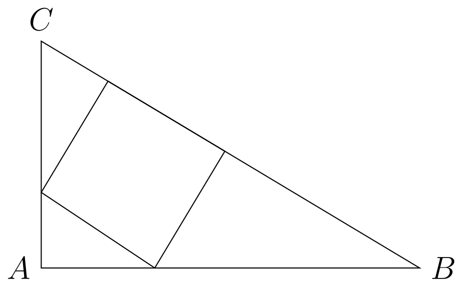
Keď si predstavíme čísla ako loptičky v jednom rade, tak za každou z prvých štyroch vybraných loptičiek bude nutne nasledovať aspoň jedna nevybraná (za piatou vybranou už nemusí, keďže je posledná), aby neboli vybrané dve po sebe idúce loptičky. Takže vždy keď vyberieme jednu z týchto prvých štyroch loptičiek určíme zároveň aj to, že tá za ňou nebude vybraná. Môžeme teda hneď na začiatku odložiť tieto štyri nevybrané loptičky bokom, a pridať ich až na záver, hneď za každú z prvých štyroch vybraných loptičiek.

Tým pádom vyberáme päticu už len z desiatich prvkov ($14 - 4 = 10$), čo vieme zrátať ako $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$.

Odčítaním týchto dvoch medzivýsledkov dostávame počet $2002 - 252 = 1750$.

Úloha 1.10: Majme pravouhlý trojuholník s dĺžkami odvesien 3 a 4. Dvomi rôznymi spôsobmi, ako na obrázku doň vpíšeme štvorec. Štvorec, ktorý leží na odvesnách má obsah S_1 a štvorec, ktorý leží na prepone má obsah S_2. Určte pomer obsahov štvorcov S_1:S_2 ako zlomok v základnom tvare.

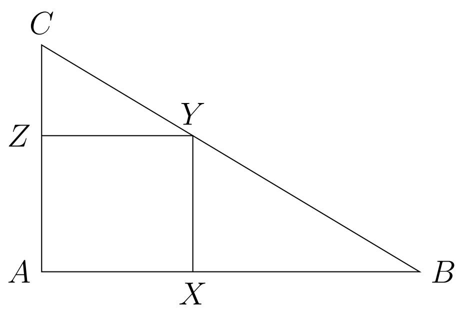


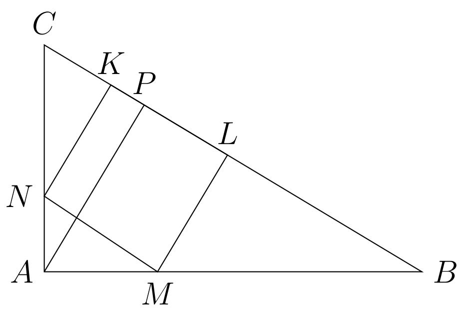


Výsledok: $\frac{13}{35}$

Riešenie: Poďme postupne vyjadriť obsahy S_1 a S_2. Nech štvorec s obsahom S_1 má stranu a. Označme si jeho vrcholy $AXYZ$. Všimnime si, že trojuholník ABC je podobný trojuholníku XBY, pretože strany štvorca sú rovnobežné s odvesnami. Z pomerov strán podobných trojuholníkov dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{|AC|}{|XY|} &= \frac{|AB|}{|XB|}\\ \frac{3}{a} &= \frac{4}{4-a}\\ 12 - 3a &= 4a\\ \frac{12}{7} &= a\end{aligned}$$





Označme S_2 štvorec s obsahom $KLMN$ a jeho stranu ako b. Ďalej označme pätu výšky z bodu A na preponu ako P. Vyjadrime dĺžku výšky AP pomocou obsahu ABC:

$$S_{ABC} = \frac{|AB||AC|}{2} = \frac{|AP||BC|}{2}$$

$$|AP| = \frac{|AB||AC|}{|BC|} = \frac{12}{5}$$

Teraz môžeme vyjadriť $|CP|$ pomocou Euklidovej vety o odvesne:

$$|CA|^2 = |CB| \cdot |CP|$$
$$|CP| = \frac{|CA|^2}{|CP|} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

Dopočítajme ešte dĺžku $|BP| = |BC| - |CP| = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$.

V ďalšom kroku si označme $|PL| = x$, potom $|KP| = |KL| - x = b - x$ a $|CK| = |CP| - |KP| = \frac{9}{5} - (b - x) = \frac{9}{5} - b + x$. Z podobnosti APC a NKC môžeme vyjadriť pomer:

$$\begin{aligned}
\frac{|AP|}{|NK|} &= \frac{|CP|}{|CK|} \\
\frac{\frac{12}{5}}{b} &= \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5} - b + x} \\
\frac{108}{5} - 12b + 12x &= 9b \\
\frac{108}{5} + 12x &= -3b \qquad (1)
\end{aligned}$$

Z podobnosti APB a MLB môžeme vyjadriť pomer:

$$\begin{aligned}
\frac{|AP|}{|ML|} &= \frac{|BP|}{|LB|} \\
\frac{\frac{12}{5}}{b} &= \frac{\frac{16}{5}}{\frac{16}{5} - x} \\
\frac{192}{5} - 12x &= 16b \qquad (2)
\end{aligned}$$

Sčítaním rovníc (1) a (2) dostávame:

$$\frac{300}{5} = 13b$$
$$b = \frac{60}{13}$$

Nakoniec spočítajme pomer $S_1 : S_2 = \frac{12}{7} : \frac{60}{13} = (12 \cdot 13) : (7 \cdot 60) = \frac{13}{35}$.

Úloha 1.11: Nájdite všetky usporiadané trojice kladných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí $a > c$ a ktoré spĺňajú obe nasledujúce rovnice:

$$ac + b + c = bc + a + 66$$

$$a + b + c = 32$$

Výsledok: (19, 7, 6)

Riešenie: Upravíme prvú rovnicu zo zadania tak, aby sme na ľavej strane dostali súčin dvoch výrazov a na pravej strane len jedno číslo:

$$ac + b + c - bc - a = 66$$

$$ac + b + c - bc - a - 1 = 65$$

$$c \cdot (a - b + 1) + (-1) \cdot (a - b + 1) = 65$$

$$(c-1)\cdot(a-b+1)=65$$

Keďže a, b, c sú kladné celé, tak $c-1$ aj $a-b+1$ sú celočíselné delitele čísla 65, ktorých súčin je 65. Keďže $c \geq 1$, tak $c-1$ je kladný deliteľ 65, a teda aj $a-b+1$ musí byť kladný deliteľ 65. Číslo 65 má 4 kladné delitele: 1, 5, 13, 65.

Rozoberme všetky možnosti pre hodnotu $c-1$:

- $c-1=1$

  V tomto prípade $a-b+1=65$. Keďže $b \geq 1$, tak $a \geq 65$. Potom druhá rovnica zo zadania $a+b+c=32$ určite neplatí. Táto možnosť nevyhovuje.

- $c-1=5$

  V tomto prípade $a-b+1=13$, teda $b=a-12$. Z $a+b+c=32$ po dosadení dostávame $a+a-12+6=32$, teda $a=19$ a $b=7$. Platí aj podmienka $a>c$, preto táto možnosť vyhovuje.

- $c-1=13$

  V tomto prípade $a-b+1=5$, teda $b=a-4$. Z $a+b+c=32$ po dosadení dostávame $a+a-4+14=32$, teda $a=11$. Kvôli podmienke $a>c$ táto možnosť nevyhovuje, lebo $c=14$.

- $c-1=65$

  V tomto prípade $c=66$, $a,b \geq 1$, teda $a+b+c=32$ určite neplatí. Táto možnosť nevyhovuje.

Rozobrali sme všetky možnosti pre hodnotu $c-1$, jediné riešenie je trojica (19, 7, 6).

Úloha 1.12: V Strome je 11 mužov a 12 žien. Chceme spomedzi nich vybrať Radu Stromu. Rada môže mať ľubovoľne veľa členov, ale podmienkou je, že počet žien bude práve o 1 väčší ako počet mužov. Počet spôsobov, koľkými vieme vybrať Radu Stromu označme ako n. Koľko rôznych deliteľov má číslo n?

Výsledok: 64

Riešenie: Povedzme, že do Rady vyberieme m mužov. Potom do nej musíme vybrať $m+1$ žien. Do Rady teda nevyberieme $12-(m+1)=11-m$ žien. Ak vyberieme hocijakých 11 ľudí zo Stromu, vedia nám jednoznačne určiť zloženie Rady. Totiž, m vybratých mužov bude v Rade, a $11-m$ vybratých žien nebude v Rade. Rôznych zložení Rady bude $\binom{23}{11}$. Ostáva už len toto číslo vyčísliť, aby sme zistili, koľko má rôznych deliteľov:

$$\binom{23}{11} = \frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\binom{23}{11} = \frac{23\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}$$

$$\binom{23}{11} = \frac{23\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 4}$$

$$\binom{23}{11} = \frac{23\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{9\cdot 6\cdot 5}$$

$$\binom{23}{11} = 23\cdot 19\cdot 17\cdot 14\cdot 13 = 23\cdot 19\cdot 17\cdot 13\cdot 7\cdot 2$$

Číslo n je súčinom 6 rôznych prvočísel, čiže má $2^6=64$ rôznych deliteľov.

2. časť

Úloha 2.1: Koľko existuje trojciferných čísel takých, že ich prostredná číslica je aritmetickým priemerom dvoch krajných číslic?

Výsledok: 45

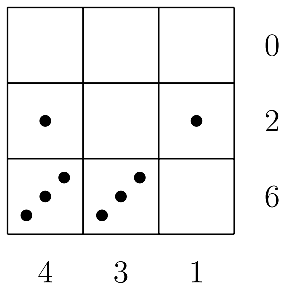
Riešenie: Ak je stredná cifra aritmetickým priemerom krajných, tak ich súčet musí byť párny . To znamená, že buď sú obe krajné cifry párne, alebo obe nepárne. Ak je prvá cifra párna, tak je jedna zo štvorice $\{2, 4, 6, 8\}$ a zároveň posledná musí byť z $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, teda máme $4 \cdot 5 = 20$ možností. Ak je prvá nepárna (5 možností), tak posledná je z množiny $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, čiže dostávame ďalších $5 \cdot 5 = 25$ možností, čo je dohromady $20 + 25 = 45$ možností.

Úloha 2.2: Michal ukladá cukríky na niektoré políčka tabuľky 3×3 (na jednom políčku môže byť aj viac cukríkov). Potom si spočíta počet cukríkov v každom zo stĺpcov aj riadkov. Chce ich uložiť tak, aby bol každý z týchto šiestich súčtov iný. Koľko najmenej cukríkov musí použiť?

Výsledok: 8

Riešenie: Musíme si uvedomiť, že ak do tabuľky umiestníme cukrík, tak bude v práve jednom stĺpci a práve jednom riadku. Súčet jednotlivých počtov cukríkov v stĺpcoch a riadkoch sa preto musí rovnať dvojnásobku počtu cukríkov v tabuľke. Najmenších 6 počtov cukríkov je 0, 1, 2, 3, 4 a 5. Súčet týchto počtov je 15, čo je však nepárne číslo, a teda počet cukríkov v tabuľke by musel byť 7,5, čo nie je celé číslo.

Skúsme druhý najmenší počet cukríkov, to je 16. Súčet 16 docielime počtami cukríkov 0, 1, 2, 3, 4 a 6. Už len stačí nájsť konkrétny príklad rozloženia 16 cukríkov v tabuľke tak, aby každý zo 6 súčtov bol iný. Napríklad takto:

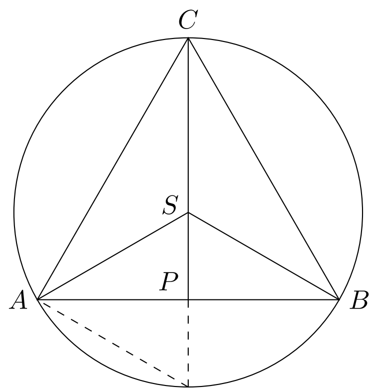


Úloha 2.3: Do kružnice sú vpísané rovnostranný trojuholník, štvorec a pravidelný šesťuholník. Dano spočítal rozdiel medzi obvodom šesťuholníka a štvorca. Peťo spočítal rozdiel medzi obvodom štvorca a trojuholníka. Súčet ich výsledkov bol $6\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$. Určte polomer kružnice.

Výsledok: $\sqrt{2}$

Riešenie: Všimnime si najprv, že súčet Danovho a Peťovho výsledku je v skutočnosti rozdiel medzi obvodom šesťuholníka a trojuholníka.

Označme vrcholy trojuholníka A, B, C, stred kružnice S a polomer kružnice r. Rozdeľme trojuholník tromi polomermi kružnice na 3 zhodné rovnoramenné trojuholníky ako na obrázku. Okolo stredu S je plný uhol 360 stupňov, takže uhol ASB má 120 stupňov. Keďže trojuholník ABS je rovnoramenný, uhly BAS a ABS majú $(180 - 120)/2 = 30$ stupňov. Spustime v trojuholníku ABS výšku na základňu AB a jej pätu označme P. Dostaneme dva pravouhlé trojuholníky APS a BPS s uhlami veľkosti 30, 90 a $180 - 30 - 90 = 60$ stupňov. Trojuholník APS teda tvorí polovicu rovnostranného trojuholníka so stranou r. Platí teda $|PS| = r/2$ a dĺžka strany AB je z Pytagorovej vety $2|AP| = 2\sqrt{r^2 - (r/2)^2} = 2\sqrt{3r^2/4} = \sqrt{3}r$. Obvod trojuholníka ABC je teda $3\sqrt{3}r$.



Rovnakým spôsobom si môžeme šesťuholník rozdeliť na 6 zhodných rovnoramenných trojuholníkov. Uhol oproti základni v týchto trojuholníkoch má veľkosť $360/6 = 60$ stupňov. To znamená, že trojuholníky sú v skutočnosti rovnostranné so stranou dlhou r. Obvod šesťuholníka je preto $6r$.

Keďže vieme, že súčet Danovho a Peťovho výsledku je rozdiel obvodu šesťuholníka a trojuholníka a zo zadania máme, že hodnota tohto súčtu je $6\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$, tak už zostáva len vyjadriť r z rovnice

$$6r - 3\sqrt{3}r = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{6}.$$

Vypočítaním rovnice dostávame, že $r = \sqrt{2}$.

Úloha 2.4: Koľko deliteľov čísla 20^{22} je druhou mocninou celého čísla?

Výsledok: 276

Riešenie: Najprv si číslo zo zadania prepíšme ako $20^{22} = 4^{22} \cdot 5^{22} = 2^{44} \cdot 5^{22}$. Ďalej si všimnime, že ľubovoľný deliteľ tohto čísla môže mať vo svojom prvočíselnom rozklade iba prvočísla 2 a 5, teda delitele sú tvaru $2^a \cdot 5^b$, kde a a b sú celé nezáporné čísla a $a \leq 44$, $b \leq 22$. Tento deliteľ bude druhou mocninou práve vtedy, keď exponent pri oboch týchto prvočíslach bude párny. Číslo a môže nadobúdať 23 rôznych hodnôt, b zas 12 rôznych hodnôt. Dokopy teda existuje $23 \cdot 12 = 276$ deliteľov, ktoré sú druhé mocniny celého čísla.

Úloha 2.5: Majme trojuholník ABC s uhlom $30°$ pri vrchole A. Nech S je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Určte pomer obsahu trojuholníka BCS ku obsahu tejto kružnice.

Výsledok: $\sqrt{3}/4\pi$

Riešenie: Pozrime sa na trojuholník BSC. V kružnici opísanej ABC je uhol BAC nad tetivou BC. K nemu prislúcha stredový uhol nad rovnakou tetivou s dvojnásobnou veľkosťou, čiže $|\sphericalangle BSC| = 60°$. Keďže SB a SC sú polomery opísanej kružnice, tak trojuholník BSC je rovnoramenný so základňou BC, s ktorou ramená zvierajú rovnaké uhly. Dopočítaním zistíme, že $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = 60°$. Trojuholník BSC je teda rovnostranný s dĺžkou strany rovnou polomeru opísanej kružnice.

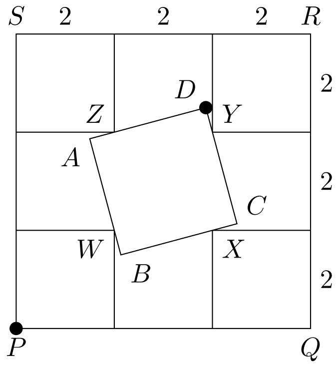
Teraz si poďme vyjadriť obsahy pomocou polomeru opísanej kružnice, ktorý si označme r. Výšku rovnostranného trojuholníka vieme podľa Pytagorovej vety vyjadriť ako $\sqrt{3/4}r$. Obsah trojuholníka BSC potom je:

$$S_{BSC} = \frac{r\sqrt{\frac{3}{4}}r}{2} = \frac{r^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Obsah kružnice je $S_k = \pi r^2$. Už len dopočítajme pomer:

$$\frac{S_{BCS}}{S_k} = \frac{\frac{r^2\sqrt{3}}{4}}{\pi r^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Úloha 2.6: V rohoch štvorca $PQRS$ so stranou dĺžky 6 cm sú umiestnené štyri menšie štvorce so stranami dĺžky 2 cm. Označme ich vrcholy W, X, Y, Z ako na obrázku. Štvorec $ABCD$ je zostrojený tak, že body W, X, Y, Z ležia vo vnútri jeho strán AB, BC, CD, DA. Určte najväčšiu možnú vzdialenosť bodov P a D.

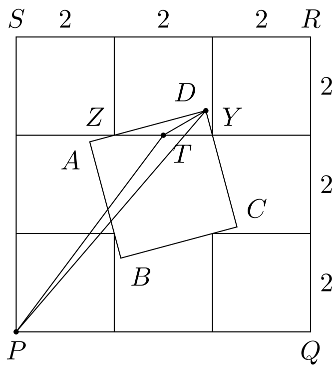


Výsledok: 6

Riešenie: Trojuholník ZYD má pri vrchole D pravý uhol. To znamená, že bod D leží na Tálesovej kružnici k nad priemerom ZY. Kružnica k má polomer 1 (pretože $|ZY| = 2$), a ak označíme T stred úsečky ZY, tak platí $|ZT| = |TD| = 1$.

Z trojuholníkovej nerovnosti a Pytagorovej vety potom máme, že

$$|PD| \leq |PT| + |TD| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}|PQ| + |ZT|\right)^2 + \left(\frac{2}{3}|PS|\right)^2} + |TD| = \sqrt{(2+1)^2 + 4^2} + 1 = 6.$$



Rovnosť v trojuholníkovej nerovnosti nastáva, ak bod T leží na úsečke PD. Táto situácia nevedie k sporu (za bod D jednoducho zvolíme priesečník Tálesovej kružnice k nad priemerom ZY a priamky PT), a preto je dĺžka 6 hľadaným maximom.

Úloha 2.7: Erik si chce posadiť kvetinkový rad. Sadí 3 druhy kvetov – fialky, tulipány a púpavy. Kvety sadí podla nasledujúcich pravidiel:

- Dve fialky nesmú byť zasadené hneď za sebou.
- Za tulipánom nesmie nasledovať nič iné ako púpava.

Koľko rôznych radov pozostávajúcich z 8 kvetov vie Erik vysadiť?

Výsledok: 595

Riešenie: Nech $F(n)$ označuje počet rôznych radov dĺžky n, ktoré končia fialkou, $T(n)$ počet rôznych radov dĺžky n, ktoré končia tulipánom, a $P(n)$ počet rôznych radov dĺžky n, ktoré končia púpavou. Zo zadania vyjadríme rekurentné vzťahy:

- $F(n) = P(n-1)$
- $T(n) = P(n-1) + F(n-1)$
- $P(n) = P(n-1) + F(n-1) + T(n-1)$

Ďalej vieme, že $F(1) = T(1) = P(1) = 1$. Potom už len postupne vypĺňame tabuľku až po $n = 8$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(n)$	1	1	3	6	13	28	60	129
$T(n)$	1	2	4	9	19	41	88	189
$P(n)$	1	3	6	13	28	60	129	277

Rôznych kvetinkových radov dĺžky 8 je teda spolu $129 + 189 + 277 = 595$.

Úloha 2.8: Peťo mal jednu bankovku, ktorou zaplatil v prvom obchode. Predavač mu však nesprávne vydal, pretože si poplietol medzi sebou eurá a centy (napríklad namiesto 15,35 eura by mu vydal 35,15 eura). Peťo si to uvedomil až v druhom obchode, kde platil len 50 centov. Po tomto druhom nákupe totižto zistil, že mu zostalo presne trikrát toľko peňazí, koľko mu malo zostať po nákupe v prvom obchode. Koľko mu správne malo zostať po nákupe v prvom obchode?

Výsledok: 18,56

Riešenie: Nech $\overline{x{,}y}$ označuje sumu v eurách, koľko mu mal pôvodne predavač vydať v prvom obchode. Túto sumu môžeme vyjadriť aj ako $100x+y$ centov. Namiesto toho mu ale vydal $\overline{y{,}x}$ eur, čo je $100y+x$ centov. Keďže $\overline{x{,}y}$ aj $\overline{y{,}x}$ sú sumy v eurách, tak rovno vieme, že x aj y sú maximálne dvojciferné čísla.

V druhom obchode zaplatil 50 centov, takže mu ostalo $100y + x - 50$ centov. Následne zistil, že mu ostalo trikrát toľko, koľko mu malo zostať po nákupe v prvom obchode. Z toho dostávame rovnicu.

$$\begin{aligned}
100y + x - 50 &= 3(100x + y) \\
97y &= 299x + 50 \\
y &= \frac{299x + 50}{97} \\
y &= 3x + \frac{2(4x + 25)}{97}
\end{aligned}$$

Z tejto rovnice vidíme, že výraz $4x + 25$ musí byť deliteľný 97.

$4x + 25 = 97$	$x = 18$	$y = 56$
$4x + 25 = 2 \cdot 97$	$x = 42,25$	x nie je celé číslo
$4x + 25 = 3 \cdot 97$	$x = 66,5$	x nie je celé číslo
$4x + 25 = 4 \cdot 97$	$x = 90,75$	x nie je celé číslo
$4x + 25 = 5 \cdot 97$	$x = 115$	x je už trojciferné číslo

Platí, že pre všetky vyššie násobky 97 už bude x aspoň trojciferné číslo, a teda nám nevyhovuje. Jediné riešenie je, že $x = 18$ a $y = 56$, a teda mu správne po prvom nákupe malo zostať 18,56 eura.

Úloha 2.9: Daný je štvorec. Rozdelíme ho n rezmi v podobe priamok na niekoľko mnohouholníkov. Aký je najväčší možný súčet vnútorných uhlov všetkých mnohouholníkov v závislosti od n?

Výsledok: $n(n+1) + 2 \cdot 180°$

Riešenie: Vrcholy jednotlivých mnohouholníkov môžeme rozdeliť do troch kategórií. Buď je vrchol priamo vrcholom štvorca, alebo leží na hrane štvorca (tieto vrcholy nazvime okrajové), alebo leží vo vnútri štvorca (tieto vrcholy nazvime vnútorné).

Všimnime si, že súčet veľkostí vnútorných uhlov mnohouholníkov, ktoré ležia okolo niektorého vrcholu štvorca, sa vždy rovná $90°$, okolo okrajového vrcholu $180°$ a okolo vnútorného vrcholu $360°$.

S pomocou tohto delenia môžeme zhora odhadnúť hľadaný maximálny súčet uhlov v mnohouholníkoch:

1. Vždy existujú presne 4 vrcholy štvorca, ktoré spolu prispejú $4 \cdot 90°$.
2. Okrajových vrcholov môže byť najviac 2 za každú priamku (ak každá priamka pretne štvorec v dvoch unikátnych vnútorných bodoch štvorca). Spolu môžu prispieť najviac $2n \cdot 180°$.
3. Vnútorných vrcholov môže byť najviac toľko, koľko je rôznych dvojíc v n-člennej množine priamok, teda $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Spolu môžu prispieť najviac $\binom{n}{2} \cdot 360°$.

Predchádzajúcimi úvahami sme zistili, že na to, aby sme maximalizovali celkový súčet uhlov, by sme chceli, aby sa každá dvojica priamok pretla v unikátnom bode ležiacom vnútri štvorca a navyše každá z priamok pretínala štvorec v dvoch unikátnych bodoch ležiacich vnútri strán štvorca. Takto sme našli horný odhad maximálneho súčtu. V zvyšnej časti riešenia trikom ukážeme, že sa odhadnuté maximum vždy dá dosiahnuť.

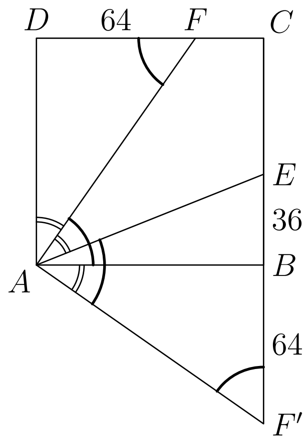
Je jednoduché rozložiť n priamok tak, aby sa každé dve pretli v unikátnom bode – zvolíme náhodnú priamku, a ak už máme zvolených k priamok a $1 \leq k < n$, stačí, ak zvolíme smer priamky odlišný od smerov všetkých k predchádzajúcich priamok a novú priamku umiestnime tak, aby neprechádzala žiadnym z už existujúcich priesečníkov (takto umiestniť priamku je možné, pretože v tomto kroku konštrukcie existuje iba konečne veľa bodov, ktorým sa priamka musí vyhnúť). Nová priamka pretne všetky predchádzajúce, pretože v rovine sa každé dve rôznobežné priamky pretnú. Keď takto skonštruujeme n priamok s $\binom{n}{2}$ unikátnymi priesečníkmi, zvolíme 4 body tak, aby tvorili štvorec, neležali na žiadnej zo zvolených priamok a zároveň všetky priesečníky dvojíc priamok ležali vnútri tohto štvorca (toto je opäť možné, pretože vrcholy môžeme zvoliť dostatočne ďaleko od seba, aby všetky priesečníky ležali vnútri štvorca určeného týmito vrcholmi, a keby niektorý zo zvolených bodov ležal na niektorej z n priamok, môžeme celý štvorec pootočiť (a prípadne ešte zväčšiť) tak, aby všetky body ležali mimo zvolených priamok). Nakoniec celú skonštruovanú sústavu podobnými transformáciami (zväčšením, zmenšením, posunutím a otočením) upravíme tak, aby obraz nami skonštruovaného štvorca bol totožný so zadaným štvorcom.

Najväčší možný súčet uhlov pre dané n je $4 \cdot 90° + 2n \cdot 180° + \binom{n}{2} \cdot 360° = (2 + 2n + n(n-1))360°/2 = n(n+1) + 2 \cdot 180°$.

Úloha 2.10: Majme štvorec $ABCD$. Vnútri strany BC je bod E tak, že $|BE| = 36$. Vnútri strany CD je bod F tak, že $|DF| = 64$. Úsečka AF rozdeľuje uhol EAD na polovicu. Aká je dĺžka úsečky AE?

Výsledok: 100

Riešenie: Obraz F' bodu F v otočení so stredom A zobrazujúcom D na B leží na polpriamke CB mimo úsečky BC tak, že $|BF'| = |DF| = 64$. Z tohto, zhodnosti otočenia, zhodnosti striedavých uhlov a zhodnosti polovíc uhla $|\sphericalangle AF'E| = |\sphericalangle AF'B| = |\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle BAF'| = |\sphericalangle EAF'|$, čiže $\triangle AEF'$ je rovnoramenný s hlavným vrcholom E, a teda $|AE| = |EF'| = |BE| + |BF'| = 36 + 64 = 100$.



Úloha 2.11: Daný je štvorec. Rozdelíme ho rezmi v podobe priamok na n mnohouholníkov. Aký je najväčší možný súčet vnútorných uhlov všetkých mnohouholníkov v závislosti od n?

Výsledok: $n \cdot 360°$

Riešenie: Vrcholy jednotlivých mnohouholníkov môžeme rozdeliť do troch kategórií. Buď je vrchol priamo vrcholom štvorca, alebo leží na hrane štvorca (tieto vrcholy nazvime okrajové), alebo leží vo vnútri štvorca (tieto vrcholy nazvime vnútorné).

Všimnime si, že súčet veľkostí vnútorných uhlov mnohouholníkov, ktoré ležia okolo niektorého vrcholu štvorca, sa vždy rovná $90°$, okolo okrajového vrcholu $180°$ a okolo vnútorného vrcholu $360°$.

Dokážme, že najvyššia možná hodnota hľadaného súčtu je $n \cdot 360°$. Vykonáme induktívny dôkaz podľa n. Pre $n = 1$ tvrdenie očividne platí. Uvažujme rozdelenie štvorca úsečkami na n mnohouholníkov, kde $n \geq 2$, a predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo k menšie ako n je maximálny súčet uhlov pri delení štvorca na k mnohouholníkov $k \cdot 360°$.

Odstráňme niektorú z priamok a položme, že počet mnohouholníkov sa zmenšil o k. Takto máme pred sebou rozdelenie štvorca na $n - k$ mnohouholníkov. Podľa indukčného predpokladu je súčet veľkostí vnútorných uhlov týchto mnohouholníkov najviac $(n - k) \cdot 360°$.

Jediný spôsob, ako sa počet mnohouholníkov mohol zmenšiť, je, že dva mnohouholníky zdieľali hranu, ktorá bola časťou odobratej priamky, a po jej odobratí sa spojili do jedného mnohouholníka. Keďže sa počet mnohouholníkov zmenšil o k, znamená to, že odobratá priamka bola pôvodne rozdelená vnútornými vrcholmi na k častí. To znamená, že vrátením priamky sa počet vnútorných vrcholov zvýši o najviac $k - 1$ a počet okrajových vrcholov sa zvýši o najviac 2.

Dokopy sa spätným pridaním odobratej priamky zvýšil súčet veľkostí vnútorných uhlov mnohouholníkov najviac o $(k - 1) \cdot 360° + 2 \cdot 180°$. Spojením tohto poznatku a indukčného predpokladu dostávame, že celkový súčet vnútorných uhlov n mnohouholníkov je najviac

$$(n - k) \cdot 360° + (k - 1) \cdot 360° + 2 \cdot 180° = n \cdot 360°.$$

Ostáva nájsť rozdelenie štvorca na n mnohouholníkov, ktoré dosahuje hodnotu $n \cdot 360°$. Štvorec stačí rozdeliť $n - 1$ rovnobežnými čiarami na n obdĺžnikov.

Úloha 2.12: Nájdite najmenšie reálne číslo k také, že pre všetky reálne čísla x, y

$$2x + 3y \leq k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Výsledok: $\sqrt{13}$

Riešenie: Najprv si rozmyslime, že k musí byť kladné. Keďže daná nerovnosť má platiť pre všetky reálne x, y, tak musí platiť aj pre $x = 1$ a $y = 0$. Keď si to dosadíme, tak dostaneme, že $2 \leq k$. Vieme, že k je aspoň 2, teda určite je kladné.

Ak nerovnosť platí pre dvojicu nezáporných reálnych čísel (x, y), tak určite platí aj pre dvojice $(-x, y)$, $(x, -y)$ a $(-x, -y)$. Dosadením $-x$ za x, respektíve $-y$ za y sa ľavá strana nerovnosti zmenší (alebo zostane rovnaká v prípade 0) a pravá strana sa nezmení. Z toho vyplýva, že nám úlohu stačí riešiť pre nezáporné x, y.

Keďže k, x, y sú nezáporné, tak nerovnosť môžeme umocniť a ďalej upravovať.

$$\begin{aligned}
(2x+3y)^2 &\leq k^2(x^2+y^2) \\
0 &\leq k^2(x^2+y^2) - (2x+3y)^2 \\
0 &\leq k^2x^2 + k^2y^2 - 4x^2 - 9y^2 - 12xy
\end{aligned}$$

Všimnime si, že $(3x-2y)^2 = 9x^2 + 4y^2 - 12xy$, preto danú nerovnosť vieme upraviť do nasledovného tvaru.

$$\begin{aligned}
0 &\leq (3x-2y)^2 + k^2x^2 + k^2y^2 - 13x^2 - 13y^2 \\
0 &\leq (3x-2y)^2 + (k^2-13)(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

Výraz $(3x-2y)^2$ je vždy nezáporný. Ak zvolíme $k = \sqrt{13}$, tak $(k^2-13)(x^2+y^2) = 0$, a teda nerovnosť platí pre všetky nezáporné reálne x, y. Ak by $k < \sqrt{13}$, tak by daná nerovnosť neplatila napríklad pre $x = 2$ a $y = 3$, pretože v tom prípade $(3x-2y)^2 = 0$ a výraz $(k^2-13)(x^2+y^2)$ by nadobudol zápornú hodnotu.

Preto najmenšie možné k, pre ktoré nerovnosť platí, je $\sqrt{13}$.

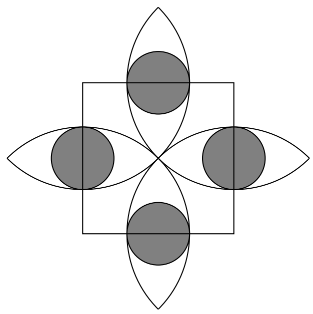
3. časť

Úloha 3.1: Koľkými spôsobmi vedia byť celé čísla od -7 do 7 zoradené tak, aby ich absolútne hodnoty vo výslednej postupnosti boli nerastúce?

Výsledok: $2^7 = 128$

Riešenie: Najprv zistime všetky absolútne hodnoty týchto čísel. Dostaneme 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Pýtame sa, koľkými spôsobmi môžeme zoradiť tieto čísla tak, aby výsledná postupnosť bola nerastúca. Je zjavné, že výsledná postupnosť bude 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 0. Otázkou už ostáva iba to, ako je zoradená každá dvojica rovnakých čísel. Pre zoradenie každej z nich existujú dve možnosti a dvojíc je 7, teda počet možných zoradení je $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$.

Úloha 3.2: Dĺžky strán štvorca na obrázku sú 2, polkružnice prechádzajú stredom štvorca a majú stredy v jeho vrcholoch. Vyznačené kruhy majú stredy na stranách štvorca a dotýkajú sa polkružníc. Určte súčet obsahov všetkých vyznačených kruhov.



Výsledok: $4\pi(3 - 2\sqrt{2})$

Riešenie: Z Pytagorovej vety platí, že dĺžka uhlopriečky štvorca je $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Keďže polkružnice prechádzajú stredom štvorca, vieme, že polomer jednej je polovicou dĺžky uhlopriečky štvorca, čiže $\sqrt{2}$. Z obrázku vidíme, že priemer jedného vyznačeného kruhu dostaneme ako rozdiel dvojnásobku polomeru polkružnice a strany štvorca (keďže na jednej strane štvorca máme dva polomery polkružníc, no ich prienik je rovný priemeru vyznačeného kruhu). Preto je priemer vyznačeného kruhu rovný $2\sqrt{2} - 2$, a teda polomer $\sqrt{2} - 1$. Následne výpočtom pre obsah kruhu zisťujeme, že obsah jedného vyznačeného kruhu je $\pi r^2 = \pi(\sqrt{2} - 1)^2 = \pi(2 - 2\sqrt{2} + 1) = \pi(3 - 2\sqrt{2})$. Obsah štyroch takých kruhov je preto $4\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

Úloha 3.3: Majme kocku a uvažujme všetky trojuholníky s vrcholmi vo vrcholoch kocky. Koľko rôznych vnútorných uhlov sa v týchto trojuholníkoch objaví?

Výsledok: 5

Riešenie: Spojnice vrcholov v kocke môžu mať tri rôzne dĺžky – dĺžku hrany kocky, dĺžku uhlopriečky steny kocky a dĺžku telesovej uhlopriečky kocky. Prejdime postupne možnosti podľa dĺžky najkratšej strany trojuholníka:

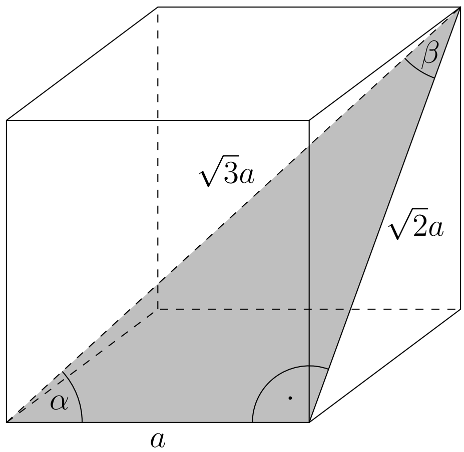
- Najkratšou stranou trojuholníka bude hrana, a teda dva vrcholy budú ležať na jednej hrane. Následne máme dve možnosti, ako umiestniť tretí vrchol – buď na niektorú zo stien, ktorá obsahuje už prvé dva vrcholy (v takom prípade dostaneme rovnoramenný trojuholník na niektorej zo stien kocky, ktorého základňu tvorí uhlopriečka strany štvorca, a preto ktorého veľkosti vnútorných uhlov sú zjavne $45°$ a $90°$), alebo na protiľahlú hranu (stranami takého trojuholníka budú hrana, uhlopriečka steny a telesová uhlopriečka, uhol zvieraný hranou a uhlopriečkou steny bude určite pravý, ďalšie dve veľkosti uhlov nám zatiaľ nie sú známe, avšak vieme, že sú navzájom rôzne a rôzne od $45°$, pretože nejde o rovnoramenný trojuholník).

- Najkratšou stranou trojuholníka bude uhlopriečka steny štvorca, čiže dva najbližšie vrcholy budú ležať na jednej stene, avšak nie na jednej hrane. Aby dĺžka žiadnej strany trojuholníka nebola kratšia ako uhlopriečka steny, nesmie tretí vrchol ležať na hrane takej, na ktorej už máme zvolený vrchol. Existuje len jeden vrchol kocky taký, aby bola dĺžka každej strany trojuholníka rovná aspoň dĺžke uhlopriečky steny štvorca. V takom prípade nám vrcholy vytvoria rovnostranný trojuholník, kde každá strana je uhlopriečkou steny štvorca, a teda každý vnútorný uhol bude mať veľkosť $60°$.

- Najkratšou stranou trojuholníka bude telesová uhlopriečka. Takýto trojuholník však neexistuje, pretože z každého vrcholu kocky vychádza práve jedna telesová uhlopriečka, a teda neexistuje trojuholník, ktorý by obsahoval dve spojnice takej dĺžky.

Stačí nám už len overiť, či sa niektorý z dvoch nepoznaných uhlov nerovná $60°$ (zvyšné dve veľkosti sme už vylúčili). Nech má kocka hranu dĺžky a, potom dĺžka uhlopriečky steny kocky je z Pytagorovej vety $a\sqrt{2}$ a dĺžka telesovej uhlopriečky je z Pytagorovej vety $a\sqrt{3}$. Nech uhol zvieraný hranou kocky a telesovou uhlopriečkou je α a uhol zvieraný telesovou uhlopriečkou a uhlopriečkou steny je β (tretí uhol je zjavne pravý z vlastností kocky). Vieme, že tabuľková hodnota $\sin 60°$ je rovná $\sqrt{3}/2$. V našom trojuholníku je $\sin\alpha$ rovný pomeru protiľahlej odvesny a prepony, čo je $(a\sqrt{2})/(a\sqrt{3}) = \sqrt{6}/3$, analogicky $\sin\beta = a/(a\sqrt{3}) = \sqrt{3}/3$. Keďže sa ani jeden z pomerov nerovná tabuľkovej hodnote, vylúčili sme, že by sa ktorýkoľvek z týchto uhlov zhodoval s akýmkoľvek iným.

Pri prechádzaní všetkých možností sme narazili na uhly veľkostí $90°$, $60°$, $45°$ a dvoch ďalších neznámych, no nutne vzájomne rôznych a zároveň rôznych od zvyšných troch. Z toho vyplýva, že sa nám môže spolu objaviť 5 rôznych veľkostí vnútorných uhlov.



Úloha 3.4: Nájdite súčet všetkých reálnych čísel x, ktoré sú riešením rovnice:

$$(x^2 - 7x + 11)^{(x^2-13x+42)} = 1.$$

Výsledok: 27

Riešenie: Zamyslime sa najprv, kedy je číslo a^b, kde a a b sú reálne čísla, rovné 1. Ak je $a > 0$, tak musí byť buď $a = 1$, alebo $b = 0$, pretože pre každé $a \neq 1$ je exponenciálna funkcia $f(x) = a^x$ prostá a platí $a^0 = 1$. Žiadna mocnina 0 nám nikdy nedá 1 (ľahko overíme, že 0^0 nám na ľavej strane nikdy nevyjde, a tak sa tým nemusíme trápiť). Ak $a < 0$, tak nám nemusí vždy vyjsť reálne číslo, ale z vlastností exponenciálnej funkcie s kladným základom si ľahko rozmyslíme, že ak $|a^b| = 1$, tak opäť musí byť $b = 0$ ($a^0 = 1$ z definície) alebo $a = -1$. Rozoberieme preto 3 prípady (exponent rovný 0, základ rovný 1 alebo -1).

1. $x^2 - 13x + 42 = 0$: Vyriešime túto rovnicu a zistíme, že riešením je $x = 6$ a $x = 7$. Ľavá strana rovnice je vtedy 5^0 resp. 11^0.

2. $x^2 - 7x + 11 = 1$: Riešením rovnice je $x = 2$ a $x = 5$. Ľavá strana rovnice je vtedy 1^{20}, resp. 1^2.

3. $x^2 - 7x + 11 = -1$: Riešením rovnice je $x = 3$ a $x = 4$. Ľavá strana rovnice je vtedy $(-1)^{12}$, resp. $(-1)^6$.

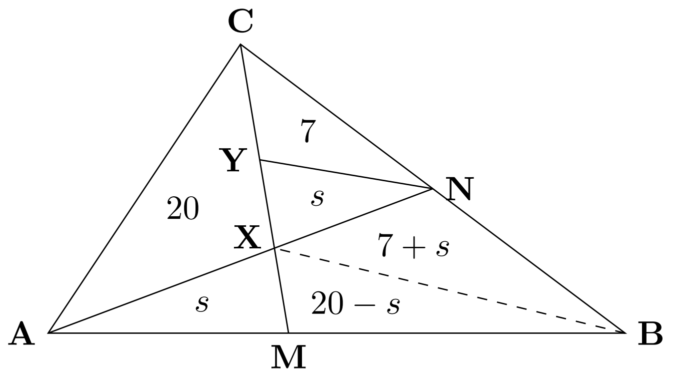
Keďže pre každú zo šiestich prípustných hodnôt x vyjde ľavá strana rovnice naozaj rovná 1, každá z týchto hodnôt je riešením rovnice. Súčet riešení je teda $6 + 7 + 2 + 5 + 3 + 4 = 27$.

Úloha 3.5: Majme trojuholník ABC. V strede BC je bod N a niekde vo vnútri strany AB je bod M. AN sa pretína s MC v bode X. Niekde vo vnútri XC je bod Y. Poznáme nasledujúce obsahy: $S_{AMX} = S_{XNY} = s$, $S_{NYC} = 7$, $S_{BMXN} = 27$. Zistite veľkosť s.

Výsledok: 8

Riešenie: Nakoľko N rozdeľuje BC na polovice, zo štandardného vzorca na výpočet obsahu trojuholníka dostaneme, že ABN a ANC musia mať rovnaký obsah. Zo zadania $S_{ABN} = S_{BMXN} + S_{AMX} = 27 + s$, a preto $S_{AXC} = S_{ABN} - S_{XNY} - S_{NYC} = 20$.

Rozdeľme si teraz štvoruholník $BMXN$ úsečkou BX na dva trojuholníky. Analogicky, trojuholníky BNX a XNC majú rovnaký obsah, a to $7 + s$, z čoho vyplýva $S_{BXM} = S_{BMXN} - S_{BNX} = 20 - s$.



Bod M delí stranu AB v nejakom pomere $k = |AM|/|MB|$. Opäť použitím vzorca pre obsah trojuholníka, aj trojuholníky nad touto úsečkou majú obsahy rozdelené v rovnakom pomere: $k = S_{AMC}/S_{MBC} = \frac{S_{AMX}}{S_{MBX}}$. Teraz si do vzťahu už len dosadíme známe obsahy a upravujeme:

$$\frac{20+s}{34+s} = \frac{s}{20-s}$$
$$400 - s^2 = s^2 + 34s$$
$$s^2 + 17s - 200 = 0$$
$$(s-8)(s+25) = 0$$

Jediné kladné riešenie je $s = 8$.

Úloha 3.6: Nájdite všetky kladné celé n, pre ktoré platí táto rovnosť:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2022}.$$

Výsledok: 1011

Riešenie: Vidíme, že každá zátvorka na ľavej strane rovnosti má tvar $(1 - \frac{1}{i^2})$ pre $i = 2, 3, \dots, n$. Z toho si každú zátvorku vieme upraviť do tvaru $\frac{i^2-1}{i^2}$, čo ďalej vieme upraviť na $\frac{(i-1)(i+1)}{i^2}$.

Teraz sa pozrime na zlomky pre ľubovoľné $i-1$, i a $i+1$, teda tri za sebou idúce zlomky v súčine na ľavej strane:

$$\cdots \cdot \frac{(i-2)i}{(i-1)(i-1)} \cdot \frac{(i-1)(i+1)}{i^2} \cdot \frac{i(i+2)}{(i+1)(i+1)} \cdot \cdots$$

Keď sa bližšie pozrieme na stredný z nich, čiže i-tý zlomok, prvá zátvorka, čiže $(i-1)$, z jeho čitateľa sa vykráti s jednou zo zátvoriek z menovateľa predošlého zlomku, zatiaľ čo druhá, čiže $(i+1)$, sa vykráti s jednou zo zátvoriek z menovateľa nasledujúceho zlomku. Rovnako jedno i z menovateľa sa vykráti s i z čitateľa predošlého zlomku a druhé sa vykráti s i z čitateľa nasledujúceho zlomku. Takto sme vykrátili celý i-tý zlomok. Z predošlého zostalo už len $\frac{i-2}{i-1}$. Aj výraz v čitateli, aj výraz v menovateli sa zase vykrátia s výrazmi v zlomku, ktorý je pred ním. Tak isto zo zlomku nasledujúcom po i-tom zostalo už len $\frac{i+2}{i+1}$ a oba výrazy sa vykrátia s výrazmi v zlomku, ktorý ide po ňom.

Takto sa vykrátia všetky zlomky v celom rade okrem tých, ktoré nemajú oboch susedov, čiže prvého a posledného. Prvý zlomok, v ktorom $i=2$, vyzeral pôvodne ako $\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}$, avšak $(2+1)$ z čitateľa a jedna z dvojok z menovateľa sa vykrátili s nasledujúcim zlomkom. Preto z neho ostalo už len $\frac{1}{2}$. Čo sa týka posledného zlomku, v ktorom $i=n$, pôvodne vyzeral ako $\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$, avšak $(n-1)$ z čitateľa a jedno n z menovateľa sa vykrátili s predchádzajúcim zlomkom. To znamená, že z neho ostalo iba $\frac{n+1}{n}$.

Celú rovnosť zo zadania sme teda upravili do tvaru:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2022}$$

Ďalšími úpravami prídeme na jediné možné n:

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2022}$$
$$2n = 2022$$
$$n = 1011$$

Úloha 3.7: Nech $f(n)$ značí najmenšie prvočíslo, ktoré delí kladné celé číslo n väčšie ako 1. Nájdite všetky riešenia pre $n^2+2f(n)+1=(2m+1)^2$, kde m,n sú kladné celé čísla a n je väčšie ako 1.

Výsledok: $m=1, n=2$

Riešenie: Keďže $2m+1$ je nepárne číslo, tak pravá strana rovnice $(2m+1)^2$ bude určite nepárne číslo. Z toho plynie, že aj ľavá strana $n^2+2f(n)+1$ musí byť nepárna. Ak by n bolo nepárne číslo, tak potom n^2 je nepárne, $2f(n)$ párne, 1 nepárne a v súčte celkovo $n^2+2f(n)+1$ bude nutne párne číslo. Tento prípad nevyhovuje, a teda n je párne číslo.

V prípade, že je n párne číslo, tak najmenší prvočíselný deliteľ n bude vždy 2, čiže máme $f(n)=2$. Po dosadení do rovnice:

$$\begin{aligned} n^2+2\cdot 2+1 &= (2m+1)^2 \\ n^2+5 &= (2m+1)^2 \\ 5 &= (2m+1)^2-n^2 \\ 5 &= (2m+1+n)(2m+1-n) \end{aligned}$$

Oba výrazy v zátvorkách sú celé čísla. A keďže prvá zátvorka $2m + 1 + n$ je navyše kladné číslo, tak aj druhá zátvorka $2m + 1 - n$ musí byť kladné číslo. Jediný spôsob, ako vyjadriť 5 ako súčin dvoch celých kladných čísel, je $5 \cdot 1$, a keďže prvá zátvorka je väčšie číslo, tak dostávame dve rovnice:

$$\begin{aligned} 2m + 1 + n &= 5 \\ 2m + 1 - n &= 1 \end{aligned}$$

Súčtom rovníc dostávame $4m + 2 = 6$, a teda $m = 1$. Ďalej už len dorátame $n = 2$. Ukázali sme, že jediné vyhovujúce riešenie je dvojica $m = 1$, $n = 2$.

Úloha 3.8: Aké je najmenšie k také, že každá podmnožina veľkosti k množiny $\{1, \ldots, 2022\}$ musí obsahovať dvojicu čísel, ktoré sa líšia práve o 22?

Výsledok: 1013

Riešenie: Poďme zistiť, koľko najviac prvkov množiny vieme vybrať tak, aby žiadne dva nemali rozdiel 22. Potom budeme vedieť, že pre každé k väčšie ako tento počet musí platiť, že sa tam nachádza aspoň jedna dvojica prvkov s rozdielom 22.

Čísla z množiny si vieme spárovať do dvojíc s rozdielom 22. Potom budeme vedieť, že z každej dvojice čísel môžeme vybrať maximálne jedno. Párovať ich budeme takýmto spôsobom: pôjdeme od 1 a každé číslo, ktoré ešte nemá pár, spárujeme s číslom o 22 väčším, pokiaľ existuje. Týmto spôsobom sa 1 spáruje s 23, 2 s 24 až 22 so 44. Potom, keďže čísla 23 až 44 už majú dvojicu, pokračujeme spárovaním 45 so 67, 46 so 68 atď. Takto budeme pokračovať až kým dôjdeme k číslu 1981, ktoré spárujeme s 2003, 1982 s 2004, $\ldots$, 2000 s 2022. Takže dostaneme dve nespárované čísla (2001 a 2002) a 1010 dvojíc. Nespárované čísla môžeme vybrať obidve a z každého páru môžeme zobrať maximálne jedno. Maximálny teoreticky možný počet vybratých prvkov je teda 1012.

Teraz si ešte musíme ukázať, že skutočne ide vybrať 1012 čísel bez toho, aby sa tam nachádzali dve s rozdielom 22. To urobíme tak, že prvú 22-icu vyberieme, druhú nie, tretiu opäť áno atď. Nachádza sa tam 91 celých 22-íc ($91 \cdot 22 = 2002$). Z nich vyberieme každú druhú počnúc prvou, čiže 46. Vybrali sme $46 \cdot 22 = 1012$ čísel.

Podarilo sa nám teda určiť, že maximálny počet prvkov, ktoré vieme do podmnožiny vybrať, je 1012. To znamená, že najmenšie k také, že každá podmnožina veľkosti k musí obsahovať dvojicu čísel, ktoré sa líšia práve o 22, je 1013.

Úloha 3.9: Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že $n = a^2 + b^2$, kde a je najmenší deliteľ n rôzny od 1 a b je hocijaký deliteľ n.

Výsledok: 20

Riešenie: Ak by číslo n bolo nepárne, tak by aj všetky jeho delitele boli nepárne. A teda a aj b by boli nepárne, čiže aj a^2 a b^2 by boli nepárne. Avšak $n = a^2 + b^2$ by bol súčet dvoch nepárnych čísel, čo je párne číslo, čím sme došli k sporu. n teda nemôže byť nepárne číslo a musí to byť párne číslo. To znamená, že $a = 2$ a $a^2 = 4$.

Položme $y = \frac{n}{b}$. Potom y je prirodzené číslo, keďže b je deliteľ n. Keď celú rovnicu $n = 4 + b^2$ predelíme b, dostaneme $y = \frac{4}{b} + b$. Keďže y aj b sú prirodzené čísla, aj $\frac{4}{b}$ musí byť prirodzené číslo, a teda $b \mid 4$. Maximálna hodnota je tým pádom $b = 4$, z čoho maximálna hodnota n je $n = 2^2 + 4^2 = 20$.

Úloha 3.10: Majme mnohosten, ktorý nemá dve steny ležiace v jednej rovine ani dve hrany ležiace na jednej priamke. Aký je najvyšší počet hrán, pre ktorý takýto mnohosten neexistuje?

Výsledok: 7

Riešenie: Ukážeme, že nevieme skonštruovať mnohosten, ktorý by mal 7 hrán a zároveň pre každý väčší počet mnohosten skonštruovať vieme. Majme celé číslo $n > 3$. Potom mnohosten s počtom hrán $2n$ skonštruujeme ako ihlan s podstavou pravidelného n-uholníka. Následne mnohosten, ktorý má $2n + 1$ hrán, získame rozdelením podstavy ihlana nejakou uhlopriečkou a miernym sklopením vzniknutých častí podstavy. Je zjavné, že takto vzniknuté mnohosteny spĺňajú podmienky zadania.

Zostáva ukázať, že mnohosten so siedmimi hranami skonštruovať nevieme. V prípade, ak by mal mnohosten 4 steny, každá musí mať práve 3 hrany, čo je dokopy 6 hrán. Ak by jedna stena mala aspoň 4 hrany, tak každá hrana je zdieľaná s inou stenou, ktorých je dokopy preto aspoň 5. Ale ak by mal mnohosten stien 5 (alebo viac), tak dokopy je hrán aspoň $\frac{3 \cdot 5}{2}$, keďže každá stena mnohostenu musí mať aspoň 3 hrany a každá hrana patrí práve do dvoch stien. To je však viac ako 7.

Úloha 3.11: Majme 25-uholník. Koľkými spôsobmi z neho vieme vybrať 5 vrcholov tak, aby medzi každými dvoma vybratými vrcholmi boli aspoň 3 nevybraté vrcholy?

Výsledok: $5\binom{9}{4} = \binom{9}{4,4,1} = 9!/(4!4!) = 630$

Riešenie: Očíslujme si vrcholy celými číslami od 0 do 24 v poradí. Zamerajme sa na prvé tri vrcholy (0, 1 a 2). Podľa ich vybranosti si rozdeľme všetky prípustné pätice vrcholov na štyri skupiny – obsahujúce 0, obsahujúce 1, obsahujúce 2 a neobsahujúce 0, 1 ani 2. Zjavne tieto skupiny pokrývajú všetky pätice. Vzhľadom na trojvrcholové rozostupy medzi vybranými vrcholmi nemôžeme z prvých troch vrcholov vybrať viac než jeden, takže sa naše štyri skupiny neprekrývajú. Preto hľadaný počet možných pätíc je súčtom počtov pätíc v týchto štyroch skupinách.

Ešte si uvedomme, že prvé tri skupiny sa líšia iba otočením celých pätíc. Každá totiž počíta to isté – počet pätíc obsahujúcich jeden fixný vrchol. Preto počty pätíc v nich sú si rovné.

Pozrime sa teda na prvú skupinu, kde sú všetky pätice obsahujúce vrchol 0. Akákoľvek taká pätica nemôže obsahovať vrcholy 1, 2, 3, 22, 23 ani 24. Zostáva vybrať štyri vrcholy z vrcholov 4 až 21 tak, aby medzi dvomi vybranými boli vždy aspoň tri nevybrané. Tu už nie je dôležité, že sme na mnohouholníku, môžeme si pokojne „rozvinúť“ spomínaných osemnásť vrcholov do radu. Tam za každým z prvých troch vybraných vrcholov nasledujú tri nevybrané. Keď v konfigurácii daného možného výberu štyroch z osemnástich odstránime prvé tri nevybrané za každým z prvých troch vybraných, dostaneme nejakú možnosť, ako vybrať štyri vrcholy z deviatich. Zároveň z každej konfigurácie „štyroch z deviatich“ vieme vložením troch nevybraných za prvé tri vybrané vyrobiť štyri z osemnástich s naším obmedzením, takže v prvej skupine je pätíc presne $\binom{9}{4}$. (Trochu iná úvaha je pozrieť sa na to tak, že začneme s trinástimi vrcholmi – štyrmi vybranými a deviatimi nevybranými – a posledných päť nevybraných vrcholov máme nejako rozdeliť medzi päť medzier, čo je úloha na oddeľovače s výsledkom $\binom{5+5-1}{5-1}$.)

V druhej a tretej skupine je tým pádom tiež po $\binom{9}{4}$ pätíc.

Zostáva štvrtá skupina. V tej máme vylúčené prvé tri vrcholy, nuž zostáva vybrať päť zo zvyšných dvadsiatich dvoch, zachovávajúc trojvrcholové rozostupy. Ako pri riešení prvej skupiny, aj tu si dvadsaťdva vrcholov už môžeme rozvinúť a dvanásť pohltiť alebo deliť päť nevybraných vrcholov do šiestich medzier medzi vybranými, čím dostaneme $\binom{10}{5}$ možností.

Dovedna existuje $3\binom{9}{4} + \binom{10}{5} = 5\binom{9}{4} = 9!/(4!4!) = 630$ prípustných pätíc.

Úloha 3.12: Graf kubického polynómu x^3+ax^2+bx+c vytína na nejakej priamke rovnobežnej s osou x dve úsečky dĺžky 1. Zároveň vytína dve úsečky aj na niektorej priamke rovnobežnej s priamkou $x = y$. Dĺžka jednej z týchto úsečiek je $\sqrt{2}$. Aká je dĺžka druhej z nich?

Výsledok: $(\sqrt{21} - 1)/\sqrt{2}$

Riešenie: V úlohe máme v rovine tri krivky – graf kubického polynómu a dve priamky. Prvá veta zadania hovorí, že graf a prvá priamka majú tri spoločné body s rozostupmi vo veľkosti 1. Označme prostredný z nich (d, e) (takže krajné budú $(d - 1, e)$ a $(d + 1, e)$).

Posuňme naše tri krivky o $(-d,-e)$. Graf sa zobrazí na graf $(x+d)^3+a(x+d)^2+b(x+d)+c-e$, čo je znova kubický polynóm, dokonca znova monický (majúci pri člene s najvyšším exponentom koeficient 1) – čitateľ sa môže presvedčiť roznásobením. Tri spoločné body grafu a prvej priamky sa zobrazia na $(-1,0)$, $(0,0)$ a $(0,-1)$, čiže prvá priamka sa zobrazí na os x. Posunutie zobrazí druhú priamku na nejakú jej rovnobežku, teda opäť na niektorú rovnobežku priamky $y=x$.

Posunutie je zhodné zobrazenie, vďaka čomu sú zachované všetky dĺžky zo zadania, aj dĺžka $\sqrt{2}$, aj dĺžka hľadaná. To znamená, že stačí úlohu riešiť na posunutých krivkách a dĺžka druhej úsečky vyťatej na obraze druhej priamky je hneď výsledkom úlohy.

Náš nový polynóm je monický kubický polynóm, ktorého graf prechádza bodmi $(-1,0)$, $(0,0)$ a $(0,-1)$, čiže majúci korene -1, 0 a 1. Vo všeobecnosti platí, že polynóm $p(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ má korene x_1, x_2 a x_3 a polynóm s týmito koreňmi musí mať tento tvar, takže náš polynóm je jednoznačne určený. Je rovný $x(x+1)(x-1)=x^3-x$. Druhá priamka je pre nejaké reálne k daná rovnicou $y=x+k$.

Ľubovoľné dva body na tejto druhej priamke sa dajú zapísať ako $(r,r+k)$ a $(s,s+k)$, z čoho ich vzdialenosť bude $\sqrt{(r-s)^2+(r+k-s-k)^2}=\sqrt{2}|r-s|$. Potom koncové body úsečky dĺžky $\sqrt{2}$ musia mať x-súradnice líšiace sa o 1 (a y-súradnice rovnako). Odtiaľ informácia o priesečníkoch grafu a druhej priamky hovorí jednak, že rovnica $x^3-x=x+k$ má tri riešenia, z ktorých niektoré dve (nie však dve krajné) majú rozdiel 1, jednak, že výsledná hľadaná vzdialenosť bude súčinom $\sqrt{2}$ a rozdielu druhých dvoch susedných. Riešenia uvedenej rovnice sú korene polynómu x^3-2x-k, ktoré si teda označme $x_1-1/2$, $x_1+1/2$ a x_2.

Z tohto označenia a monickosti polynómu plynie, že (pre všetky reálne x)

$$\begin{aligned}x^3-2x+k&=\left(x-x_1+\frac{1}{2}\right)\left(x-x_1-\frac{1}{2}\right)(x-x_2)\\&=x^3-(2x_1+x_2)x^2+\left(x_1^2+2x_1x_2-\frac{1}{4}\right)x-x_1^2x_2+\frac{x_2}{4}.\end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov pri lineárnych a kvadratických členoch dostávame (naneštastie kvadratickú) sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi.

$$\begin{aligned}x_1^2+2x_1x_2-\frac{1}{4}&=-2\\-2x_1-x_2&=0\end{aligned}$$

Z druhej rovnice vyjadríme, že $x_2=-2x_1$, čo takto dosadíme do prvej rovnice a dostaneme, že $-3x_1^2=-7/4$. Odtiaľ už $|x_1|=\sqrt{7}/(2\sqrt{3})$. Môžeme dopočítať, že korene x^3-2x-k sú

$$\left\{-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right\}\quad\text{alebo}\quad\left\{\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\},$$

alebo (aj keď bez dopočítania možno nemáme istotu, že to naozaj vyjde) vyjadriť, že keď x_2 padne (ako má) mimo intervalu $\langle x_1-1/2,x_1+1/2\rangle$, tak hľadaná vzdialenosť je

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\left(|x_2-x_1|-\frac{1}{2}\right)&=\sqrt{2}\left(|-2x_1-x_1|-\frac{1}{2}\right)\\&=\sqrt{2}\left(3|x_1|-\frac{1}{2}\right)\\&=\sqrt{2}\left(3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{\sqrt{21}-1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

autori:	Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Gbúr, Jakub Genči, Matej Hanus, Peter Kovács, Martin Masrna, Matúš Masrna, Michal Masrna, Lujza Milotová, Kristína Mišlanová, Erik Novák, Daniel Onduš, Patrik Paľovčík, Ján Richnavský, Žaneta Semanišinová, Martin Spišák, Timea Szöllősová
recenzia a úprava:	Matej Hanus, Róberta Juríková, Martin Masrna, Matúš Masrna
názov:	**Košický Matboj – 27. 10. 2022**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`seminar.strom.sk/sk/matboj`