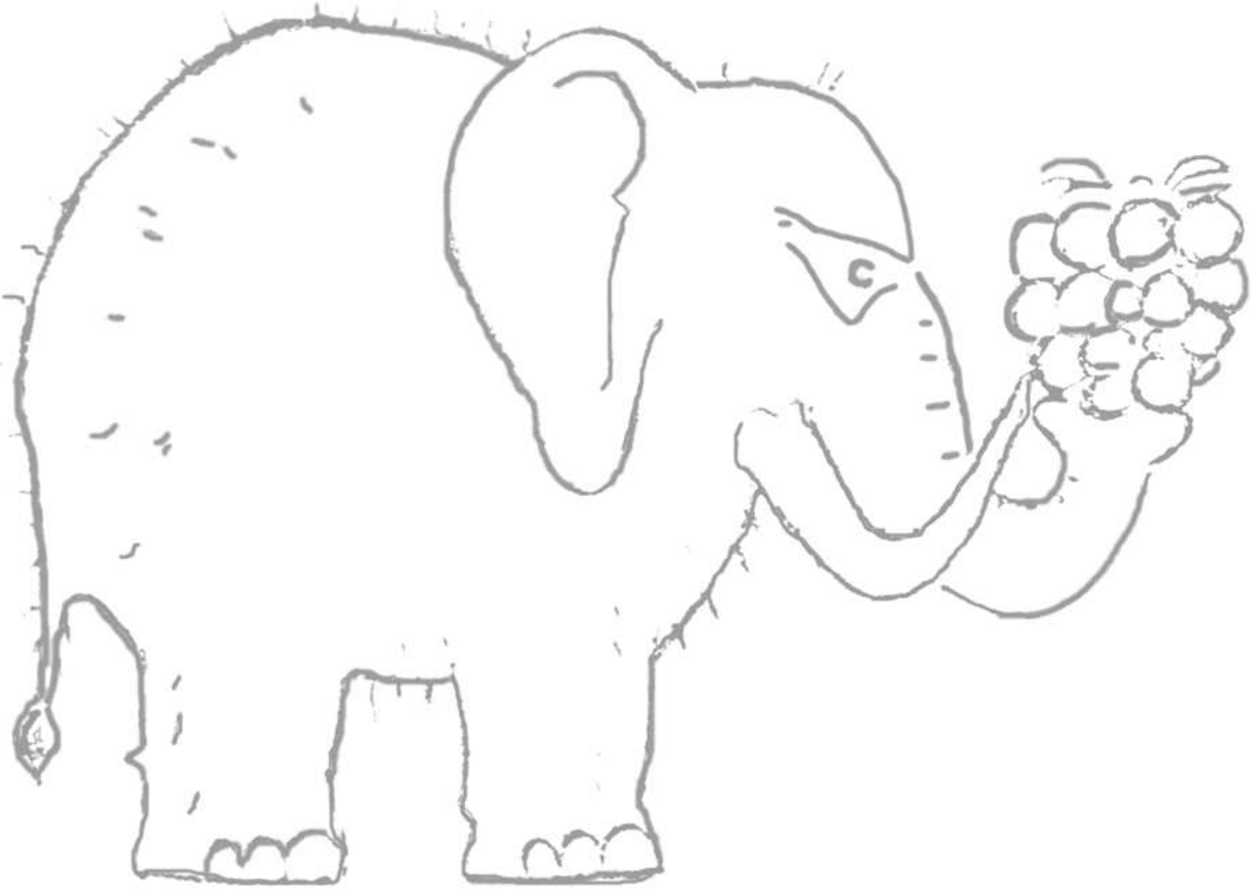


Mamut

Košice, 3. 6. 2022

Ľahké

Ľahké 1:

Peťo vie, že cena nákupu je o 3 eurá nižšia ako dvojnásobok najväčšieho jednociferného čísla. Koľko musí Peťo zaplatiť?

Výsledok: 15

Riešenie:

Najväčšie jednociferné číslo je 9. Jeho dvojnásobok je $9 \cdot 2 = 18$. Číslo o 3 menšie ako 18 je $18 - 3 = 15$, takže Peťo musí zaplatiť 15 eur.

Ľahké 2:

Kristín vie, že v cukrárni majú rovnako veľa druhov zmrzliny ako je dvojciferných čísel, ktorých cifry majú súčin 6. Koľko druhov zmrzliny predávajú v cukrárni?

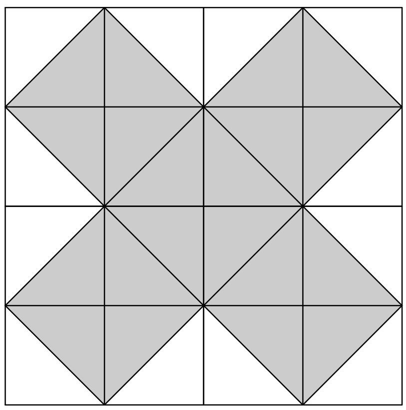
Výsledok: 4

Riešenie:

Číslo 6 vieme dostať ako súčin číslic 1 a 6 alebo 2 a 3. Dvojciferné čísla so súčinom cifier 6 sú potom 16, 61, 23 a 32. To znamená, že v cukrárni predávajú 4 druhy zmrzliny.

Ľahké 3:

Dano si nakreslil útvar v štvorčekovej sieti 4×4 štvorčeky (viď obrázok). Aký je obsah útvaru (teda vyznačenej časti) v sieti, ak dĺžka strany celej štvorčekovej siete je $8\,\text{cm}$?



Výsledok: $40\,\text{cm}^2$

Riešenie:

Vieme, že uhlopriečka štvorca delí štvorec na polovicu. Na obrázku potom máme 20 vyznačených polovíc malých štvorčekov, a teda 10 celých štvorčekov. Celá mriežka má stranu dlhú $8\,\text{cm}$, a keďže sú na nej 4 malé štvorčeky, tak jeden štvorček bude mať stranu $8\,\text{cm} : 4 = 2\,\text{cm}$. Ak jeden malý štvorček má stranu $2\,\text{cm}$, tak potom jeho obsah je $2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$. Keďže takýchto štvorčekov máme vyznačených 10, obsah útvaru (teda vyznačenej časti) bude $10 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 40\,\text{cm}^2$.

Ľahké 4:

Koľko rôznych obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán v centimetroch má obsah $60\,\text{cm}^2$?

Výsledok: 6

Riešenie:

Aby bol obsah obdĺžnika 60, musia byť dĺžky jeho strán deliteľmi 60 (a ich súčin musí byť 60). Týmito deliteľmi sú 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 a 60. Z týchto deliteľov vieme vytvoriť nasledujúce obdĺžniky: 1×60; 2×30; 3×20; 4×15; 5×12 a 6×10. To znamená, že existuje 6 rôznych obdĺžnikov, ktorých obsah je $60\,\mathrm{cm}^2$ (je dôležité si uvedomiť, že napr. obdĺžnik 1×60 je rovnaký ako obdĺžnik 60×1).

Ľahké 5:

Michal napočítal na 3 stromoch 60 vtákov. O 5 minút neskôr z prvého stromu odletelo 6 vtákov, z druhého 8 a z tretieho 4 vtáky. Potom si Michal všimol, že na každom strome je rovnaký počet vtákov. Koľko vtákov bolo na jednotlivých stromoch predtým, než niektoré odleteli?

Výsledok: 20, 22, 18

Riešenie:

Po 5 minútach odletelo zo stromov spolu $6+8+4 = 18$ vtákov, čiže na stromoch ostalo $60-18 = 42$ vtákov. Na každom zo stromov ostal rovnaký počet vtákov, a to $42 : 3 = 14$. Aby sme zistili, koľko vtákov bolo na každom zo stromov, stačí pripočítať počty vtákov, ktoré z nich odleteli. Na prvom strome bolo teda pôvodne $14+6 = 20$ vtákov, na druhom $14+8 = 22$ vtákov a na treťom $14+4 = 18$ vtákov.

Ľahké 6:

Ak 4 ľudia opravia 4 bicykle za 4 hodiny, koľko hodín potrvá 8 ľuďom opraviť 16 bicyklov?

Výsledok: 8 hodín

Riešenie:

Ak 4 ľudia opravia 4 bicykle za 4 hodiny, tak 1 človek opraví 4 bicykle za štyrikrát dlhší čas, čiže za $4 \cdot 4 = 16$ hodín. To znamená, že 1 človek opravuje 1 bicykel $16 : 4 = 4$ hodiny. 16 bicyklov potom jeden človek opraví za $16 \cdot 4 = 64$ hodín. Ôsmim ľuďom opraviť 16 bicyklov potrvá osemkrát kratšie, čiže $64 : 8 = 8$ hodín.

Ľahké 7:

Maťo si na papier nakreslil osem osmičiek. Chce medzi ne vložiť niekoľko znamienok „+“ tak, aby súčet, ktorý mu takto vznikne, bol 1000. Ako má medzi osmičky vložiť znamienka?

Výsledok: $888 + 88 + 8 + 8 + 8$

Riešenie:

Keby sme chceli číslo 1000 napísať ako súčet dvojciferných alebo jednociferných čísel, tak to nepôjde. Z ôsmich osmičiek by sme vedeli zložiť najviac štyri dvojciferné čísla 88, ktoré ak by sme sčítali, tak by sme dostali výsledok $88 \cdot 4 = 352$. To znamená, že potrebujeme použiť trojciferné číslo 888.

Od čísla 1000 odčítame 888, aby sme zistili, aké číslo máme vytvoriť zo zvyšných piatich osmičiek. Dostaneme $1000-888 = 112$. Teraz môžeme použiť už iba dvojciferné alebo jednociferné čísla, keďže 888 je väčšie ako 112. Keby sme sčítavali iba jednociferné čísla, mali by sme $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$. Vidíme, že nám chýba $112 - 40 = 72$ a nezostali nám žiadne osmičky. Čiže musíme použiť číslo 88 práve raz.

Ešte potrebujeme vytvoriť súčet $112-88 = 24$. Zostali nám už iba tri osmičky a máme nimi zapísať 24, čo je presne $8+8+8 = 24$. Čiže Maťo má vkladať znamienka tak, aby vytvoril súčet $888+88+8+8+8 = 1000$.

Ľahké 8:

Matúš sa rozhodol opraviť rozbité ručičkové hodiny. Opravu dokončil o 6:15 aj so správne nastavenými ručičkami. Niečo však počas opravy pokazil a ručičky sa síce začali pohybovať správnou rýchlosťou, ale opačným smerom. Matúš si svoju chybu všimol až večer o 19:30. Akú hodnotu vtedy ukazovali hodiny?

Výsledok: 5:00

Riešenie:

Najprv si vypočítame, koľko hodín a minút prešlo od opravy. Matúš si všimol chybu hodín o 19:30, takže od 6:15 ubehlo $19 - 6 = 13$ hodín a $30 - 15 = 15$ minút. Keďže ručičky sa pohybovali smerom dozadu, tak od času 6:15 musíme odčítať 13 hodín a 15 minút. Vieme však, že za 12 hodín sa ručičky na hodinách dostanú do presne rovnakej polohy, ako boli pred 12 hodinami. Takže po 12 hodinách od opravy hodiny zase ukazovali 6:15. Zostáva nám teda ručičky posunúť už iba o 1 hodinu a 15 minút dozadu, čiže od 6:15 odčítať 1 hodinu a 15 minút, čím dostaneme čas 5:00. Hodiny teda ukazovali 5:00.

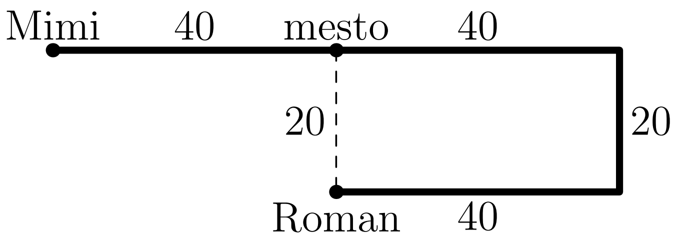
Ľahké 9:

Roman a Mimi chceli ísť na túru, ale Mimi ochorel, a preto ostal doma. Roman sa teda vybral sám. Najprv išiel 40 km do najbližšieho mesta, potom ďalších 40 km rovnakým smerom. Potom sa otočil kolmo doprava, prešiel 20 km, potom sa zase otočil kolmo doprava a prešiel ešte 40 km. Kto z nich dvoch je teraz bližšie k mestu, cez ktoré Roman počas túry prešiel, a ako ďaleko od neho je?

Výsledok: Roman, 20 km

Riešenie:

Roman najprv prišiel do mesta a potom sa od neho vzdialil o 40 km. Počas svojej cesty sa otočil dvakrát kolmo doprava, takže sa na konci vracal smerom späť k mestu. Takto prešiel 40 km, čiže ak by nešiel 20 km doprava, ale iba sa dvakrát otočil, tak by sa vrátil presne naspäť do mesta. On sa však medzi otočeniami pohol smerom doprava od mesta o 20 km. Preto, ako môžeme vidieť aj na obrázku, je vzdialenosť medzi Romanom a mestom 20 km. Mimi je od mesta vzdialený 40 km, keďže ostal doma.



Ľahké 10:

V novej klubovni boli iba stoličky a stôl. Každá stolička mala štyri nohy, stôl bol trojnohý. Do klubovne prišli skauti. Každý si sadol na stoličku, no dve stoličky zostali neobsadené a počet všetkých nôh v miestnosti bol 101. Koľko stoličiek bolo v klubovni?

Výsledok: 17

Riešenie:

Celkový počet nôh v miestnosti (101) je súčet počtu nôh stoličiek, počtu nôh skautov a počtu nôh stola. Od 101 odpočítame počet nôh stola (3) a počet nôh neobsadených stoličiek ($2 \cdot 4 = 8$), a tak dostaneme počet nôh všekých obsadených stoličiek plus počet nôh skautov: $101-3-8 = 90$. Keď tento počet vydelíme šiestimi (pretože jedna stolička a jeden skaut maju spolu $4+2 = 6$ nôh), tak zistíme, aký je počet obsadených stoličiek (a zároveň počet skautov): $90 : 6 = 15$. Teraz k počtu obsadených stoličiek pripočítame počet neobsadených stoličiek a zistíme celkový počet stoličiek: $15 + 2 = 17$. V klubovni preto bolo 17 stoličiek.

Ľahké 11:

Tento rok oslávil Samo 41 rokov. Jeho synovia majú teraz 5, 11 a 15 rokov. O koľko rokov sa bude Samov vek rovnať súčtu vekov jeho troch synov?

Výsledok: 5

Riešenie:

Samovi synovia majú spolu 31 rokov, teda o 10 menej ako Samo. Za jeden rok sa súčet vekov Samových synov zvýši o 3 (za každého syna o 1) a Samov vek o 1. To znamená, že súčet vekov Samových synov každý rok narastá o 2 roky oproti Samovmu veku, takže ak je teraz rozdiel 10 rokov, o 5 rokov sa budú rovnať. Môžeme si overiť, že naozaj o 5 rokov bude mať Samo 46 rokov a jeho synovia 10, 16 a 20, čiže platí $46 = 10 + 16 + 20$.

Ľahké 12:

Robka mala vo vrecku niekoľko cukríkov. Keď ich všetky vybrala, zistila, že ich môže rozdeliť do skupín po siedmich, ale jeden cukrík jej zvýši. Podobne ich vie rozdeliť do skupín po šiestich, no teraz jej zvýši päť cukríkov. Koľko cukríkov mala Robka vo vrecku, ak ich bolo menej ako 40?

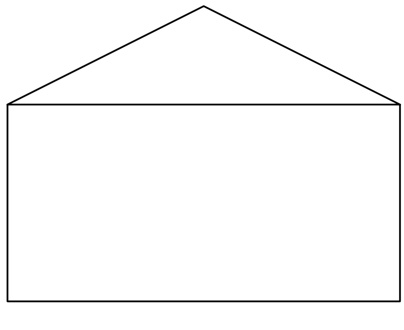
Výsledok: 29

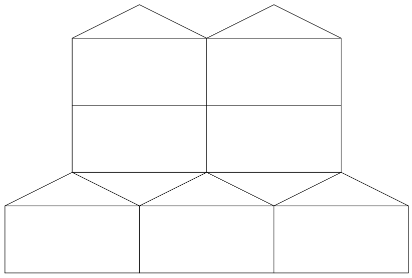
Riešenie:

Aby Robka mohla rozdeliť cukríky do siedmich skupín, pričom jej jeden ostane, musí byť počet cukríkov deliteľný siedmimi a ešte zväčšený o 1. Takýmito číslami menšími ako 40 sú $7 \cdot 0 + 1 = 1$, $7 \cdot 1 + 1 = 8$, $7 \cdot 2 + 1 = 15$, $7 \cdot 3 + 1 = 22$, $7 \cdot 4 + 1 = 29$ a $7 \cdot 5 + 1 = 36$ ($7 \cdot 6 + 1$ už je priveľa). Podobne, ak cukríky delí do šiestich skupín a zostane jej päť cukríkov, tak môže mať $6 \cdot 0 + 5 = 5$, $6 \cdot 1 + 5 = 11$, $6 \cdot 2 + 5 = 17$, $6 \cdot 3 + 5 = 23$, $6 \cdot 4 + 5 = 29$ a $6 \cdot 5 + 5 = 35$ cukríkov ($6 \cdot 6 + 5$ je opäť priveľa). Vidíme, že len číslo 29 sa vyskytlo v oboch výpisoch, preto je toto číslo naším jediným riešením.

Ľahké 13:

Kubo si nastrihal niekoľko domčekov zložených z obdĺžnika a rovnoramenného trojuholníka ako vidíme na obrázku. Vie, že obvod jedného domčeka je 47 cm. Potom zo siedmich domčekov poskladal útvar, ktorý je na obrázku. Aký je obvod tohto útvaru?





Výsledok: 141 cm

Riešenie:

Vieme, že jeden domček má na obvode 2 šikmé, 2 bočné a 1 spodnú stranu. Útvar, ktorý si Kubo poskladal, má 6 šikmých, 6 bočných a 3 spodné strany. To znamená, že obvod útvaru tvoria v skutočnosti 3 celé obvody pôvodného domčeka, jeho dĺžka je preto $3 \cdot 47\,\text{cm} = 141\,\text{cm}$.

Ľahké 14:

Martin má obdĺžnikový stôl s rozmermi 80×140 cm. Chce ho pokryť obrusom tak, aby na každom okraji stola presahoval rovnakou dĺžkou. Aký dlhý obrus potom musí kúpiť, ak v obchode majú iba obrusy so šírkou 120 cm a Martin ho doma vôbec nechce strihať?

Výsledok: 180 cm

Riešenie:

Kratšiu stranu stola pokryjeme 120 cm dlhou stranou obrusu, pretože dlhšiu stranu stola by týmto rozmerom obrus nezakryl. Obrus nám presahuje dokopy o $120\,\text{cm} - 80\,\text{cm} = 40\,\text{cm}$ (t. j. 20 cm na každej strane). Dlhšia strana stola má 140 cm, k čomu keď prirátame náš presah, dostávame $140\,\text{cm} + 40\,\text{cm} = 180\,\text{cm}$. Martin preto potrebuje kúpiť obrus dlhý 180 cm.

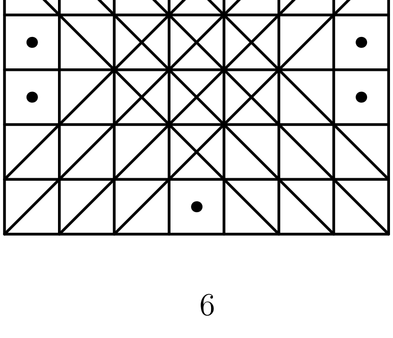
Ľahké 15:

Mihál má štvorčekovú mriežku veľkosti 7×6, pričom si označil stred každého štvorčeka. Potom si obtiahol všetky štvorce 5×5 a nakreslil si ich uhlopriečky. Cez koľko stredov štvorčekov v pôvodnej mriežke neprechádza žiadna nakreslená uhlopriečka?

Výsledok: 6

Riešenie:

Pozrime sa na mriežku 7×6 bez posledného riadka. Dostaneme tak mriežku 7×5. V tejto mriežke vieme nájsť 3 štvorce 5×5. Podobne ak si odmyslíme prvý riadok, tak nájdeme 3 štvorce 5×5. Dokopy v mriežke 7×6 nájdeme 6 štvorcov 5×5. Keď nakreslíme uhlopriečky všetkých týchto štvorcov (niektoré sa v mriežke budú čiastočne prekrývať), tak dostaneme riešenie, ktoré môžete vidieť na obrázku. Vidíme, že žiadna uhlopriečka neprechádza cez stredy šiestich štvorčekov, ktoré sú na obrázku označené bodkou.



Ľahké 16:

Karin, Mirka a Sara hrali medzi sebou šach. V každej hre jedna z nich vyhrala a jedna prehrala. Karin vyhrala 4 a prehrala 2 hry. Mirka vyhrala 3 a prehrala taktiež 3 hry. Ak Sara prehrala 3 hry, koľkokrát vyhrala?

Výsledok: 1

Riešenie:

Počet hier zistíme tak, že spočítame počet všetkých prehier. To je $2+3+3=8$ hier. Keďže v každej hre jedna z nich vyhrala a jedna prehrala, počet výhier musí byť rovnaký ako počet prehier. Karin a Mirka spolu vyhrali $3+4=7$ hier, čo znamená, že Sara vyhrala $8-7=1$ hru.

Ľahké 17:

Dňa 3. 6. 2022 sa o 4:56 Kubo vydal na cestu k bratovi Matejovi, kam dorazil o 54 minút neskôr. Podľa tamojších hodín však prišiel o 3:21. O koľko minút viac ukazujú Kubove hodiny než Matejove?

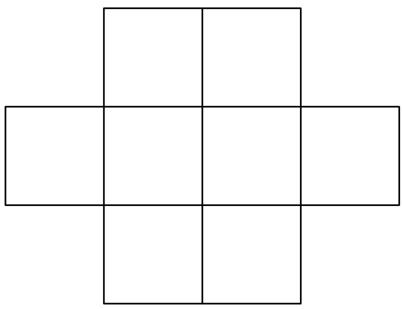
Výsledok: 149

Riešenie:

Kubovi trvala cesta 54 minút, takže jeho hodinky ukazovali 5:50, keď dorazil k Matejovi. Tam bolo iba 3:21, čo je o $5-3=2$ hodiny a $50-21=29$ minút menej. Dve hodiny sú 120 minút, teda dokopy ukazujú Kubove hodiny o $120+29=149$ minút viac.

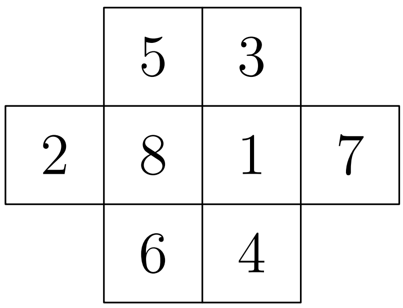
Ľahké 18:

Števko chce do políčok vpísať čísla od 1 do 8 tak, aby sa políčka, v ktorých sú po sebe idúce čísla, nedotýkali ani hranami, ani rohmi. Do ktorého políčka má napísať aké číslo?



Výsledok:

Napríklad:



Riešenie:

V strede máme dve políčka, ktoré susedia so všetkými ostatnými okrem jedného. Do nich teda musíme napísať čísla 1 a 8, pretože jedine tieto dve čísla majú iba jedného suseda v rade po sebe idúcich čísel. Týchto ich susedov, čiže čísla 2 a 7, tým pádom musíme napísať presne do tých dvoch políčok, ktoré s nimi nesusedia.

Zvyšné čísla, takže 3, 4, 5 a 6, musíme napísať do dvoch dvojíc susediacich políčok. Čísla 3 a 4 nemôžu susediť, 4 a 5 tiež nie a 5 a 6 tiež nie. To znamená, že do párov musíme dať 3 s 5 a 4 so 6. Teraz umiestnime číslo 3 tak, aby nesusedilo s číslom 2, rovnako umiestnime číslo 6 tak, aby nesusedilo s číslom 7 ani 3 (pretože s 3 musí susediť 5). Napokon iba doplníme čísla 4 a 5.

Na obrázku je jedna z možností, ako podľa tohto postupu môžeme vyplniť políčka, avšak správnych riešení existuje viac (celý obrázok môžeme napríkald zrkadlovo otočiť alebo vymeniť dvojicu 5 a 3 s dvojicou 6 a 4).

Ľahké 19:

Všetky izby v hoteli sú očíslované trojcifernými číslami. Prvá cifra reprezentuje poschodie a posledné dve cifry číslo izby. Hotel má 5 poschodí očíslovaných 1 až 5 a na každom poschodí 35 izieb očíslovaných od 01 po 35. To znamená, že izba číslo 134 sa nachádza na prvom poschodí a v rámci poschodia má číslo 34. Koľkokrát je napísaná cifra 2 na dverách hotelových izieb?

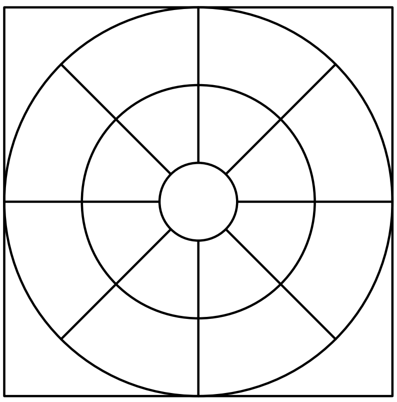
Výsledok: 105

Riešenie:

Budeme sa postupne pozerať na každú pozíciu v označení izieb a počítať, koľkokrát sa na danej pozícii cifra 2 vyskytuje. Na prvom mieste sa 2 nachádza iba na druhom poschodí, a to pri každej izbe, teda 35-krát. Na druhom mieste je na izbách 20 až 29, čo je 10 izieb, a tie sú na každom poschodí, takže $5 \cdot 10 = 50$-krát. Na treťom mieste sa cifra 2 nachádza na izbách s číslami $02, 12, 22$ a 32, ktoré sú taktiež na všetkých piatich poschodiach, takže $4 \cdot 5 = 20$-krát. To nám už iba stačí sčítať a dostaneme, že cifra 2 sa na dverách nachádza $35 + 50 + 20 = 105$-krát.

Ľahké 20:

Timka si maľuje rôzne obrázky. Zistite, koľko najmenej farieb potrebuje použiť na ofarbenie tohto obrázka, ak žiadne dve hranou susediace políčka nesmú byť rovnakej farby (rohové políčka štvorca spolu nesusedia).

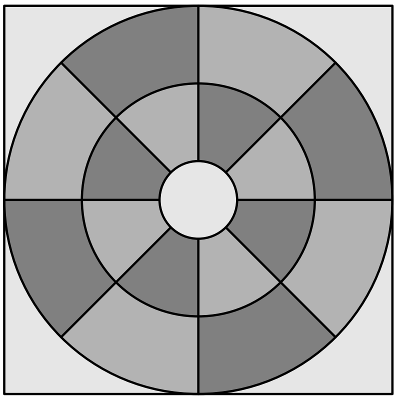


Výsledok: 3

Riešenie:

Vieme, že Timka potrebuje minimálne tri farby, lebo ak by mala iba dve, tak nastane problém s farbou stredového kruhu. Ten by v takom prípade mal buď rovnakú farbu ako nejaké z políčok, ktoré sa ho dotýkajú, alebo všetky políčka s ním susediace budú mať rovnakú farbu (ale inú ako stredový kruh).

Tri farby nám stačia (viď obrázok): do stredového kruhu dáme jednu z nich a ďalšie dve vystriedame okolo neho. V najväčšom kruhu budeme tieto dve farby opäť striedať, no v opačnom poradí. Na 4 krajné políčka nebudeme potrebovať ďalšiu farbu, lebo ich vieme vyplniť tou istou farbou ako stredový kruh, keďže spolu nesusedia.



Ľahké 21:

Paťo išiel z Košíc do Bratislavy. Z Košíc vyrazil ráno a na obed sa zastavil v Lučenci. Tam si všimol, že Košice sú od neho vzdialené 152 km a Bratislava 250 km. Po tom, ako prešiel ďalšiu časť cesty, si uvedomil, že teraz mu chýba prejsť už len polovicu vzdialenosti, ktorú prešiel od rána. Koľko kilometrov prešiel od obeda?

Výsledok: 116

Riešenie:

Keďže Bratislava je od Lučenca vzdialená 250 km a Košice sú od Lučenca vzdialené 152 km, tak Paťo musel dokopy prejsť $250\,\text{km} + 152\,\text{km} = 402\,\text{km}$. Keď sa Paťo zastavil poobede, potreboval prejsť ešte polovicu vzdialenosti, ktorú prešiel od rána. To znamená, že celú cestu vieme rozdeliť na 3 rovnako dlhé úseky, pričom dĺžka jedného bude $402\,\text{km} : 3 = 134\,\text{km}$.

Paťovi zostáva prejsť už iba jednu tretinu celej cesty, teda 134 km. Vzdialenosť, ktorú prešiel od obeda, spočítame ako vzdialenosť, o ktorú sa priblížil k Bratislave. To je $250 - 134 = 116\,\text{km}$.

Ľahké 22:

Janka má na poličke dlhej 70 cm uložených 22 kníh dvoch rôznych šírok. Šírka tenších kníh je 2 cm a šírka hrubších kníh je 4 cm. Koľko hrubších kníh má Janka na poličke, ak vieme, že polička je úplne plná?

Výsledok: 13

Riešenie:

Ak by sme chceli zaplniť poličku len tenšími knihami, zaplnili by sme $22 \cdot 2\,\text{cm} = 44\,\text{cm}$. Ostalo by nám teda ešte $70\,\text{cm} - 44\,\text{cm} = 26\,\text{cm}$ voľného priestoru. Za každú tenšiu knihu, ktorú vymeníme za hrubšiu, zaberú knihy o 2 cm viac priestoru na poličke. Takto potrebujeme pridať 26 cm, čiže na poličke musí byť 9 tenších a 13 hrubších kníh.

Ľahké 23:

Kapitán Erik má loď, ktorou sa potrebuje dostať do Košíc na dôležité stretnutie. Jeho loď dosahuje rýchlosť 39 km/h, avšak sa musí plaviť proti prúdu rieky, ktorého rýchlosť je 5 km/h. Kedy najneskôr potrebuje vyraziť, ak je od Košíc vzdialený 85 km a na stretnutie musí prísť o 12:00?

Výsledok: 9:30

Riešenie:

Rýchlosť lode proti prúdu rieky je rovná rozdielu rýchlosti lode a rýchlosti prúdu, čiže $39\,\mathrm{km/h} - 5\,\mathrm{km/h} = 34\,\mathrm{km/h}$. Čas môžeme spočítať ako podiel vzdialenosti, ktorú musí Erik prejsť, a rýchlosti, ktorou ide loď proti prúdu rieky. To znamená, že vzdialenosť 85 km loď prejde za $85\,\mathrm{km} : 34\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$. Loď teda musela vyraziť najneskôr 2,5 h pred stretnutím, čiže o 9:30.

Ľahké 24:

Žanetka si k trom stranám štvorca so stranou dlhou 16 cm narysovala rovnostranné trojuholníky. O koľko centimetrov sa zvýšil obvod nového útvaru oproti pôvodnému?

Výsledok: 48

Riešenie:

Keď prikreslíme rovnostranný trojuholník na stranu štvorca, tak spojíme jednu stranu štvorca a jednu stranu trojuholníka, pričom ani jedna z týchto strán už nebude na obvode. Ostanú nám ale dve strany trojuholníka, ktoré na obvode budú. Teda jedna strana štvorca bude nahradená dvoma stranami pridaného trojuholníka. Keďže trojuholníky sú rovnostranné, tak dĺžky ich strán sú rovnaké ako dĺžky strán štvorca.

Za každú z troch odstránených strán štvorca pridáme v konečnom obvode dve strany trojuholníka, tie sú ale rovnako dlhé. To znamená, že obvod sa zväčší o tri strany. To je $3 \cdot 16\,\mathrm{cm} = 48\,\mathrm{cm}$.

Ľahké 25:

Gabča hodila naraz jednou bielou a piatimi červenými kockami. Súčet čísel, ktoré jej padli na kockách, bol 30. Aké najmenšie číslo jej mohlo padnúť na bielej kocke, ak vieme, že aspoň na jednej červenej kocke nepadlo väčšie číslo ako na bielej?

Výsledok: 3

Riešenie:

Ak by na bielej kocke padla jednotka, tak aspoň na jednej červenej by musela padnúť tiež jednotka. Ostanú nám štyri kocky, na ktorých by nám muselo padnúť v súčte $30 - 1 - 1 = 28$. To sa ale nedá, kedže $4 \cdot 6 = 24$, čo je menej ako 28.

Rovnako, ak by na bielej kocke padla dvojka, tak aspoň na jednej červenej musela padnúť najviac dvojka. Znova nám to však nestačí, pretože máme 4 kocky na to, aby sme hodili v súčte $30-2-2 = 26$, čo sa nedá.

V prípade, že na bielej kocke padlo číslo 3, na nejakej červenej muselo padnúť 1, 2 alebo 3. Ak padlo 3, tak máme 4 kocky, na ktorých muselo dokopy padnúť najmenej $30 - 3 - 3 = 24$. To už sa stať mohlo, a to tak, že Gabči padli čísla 3, 3, 6, 6, 6 a 6.

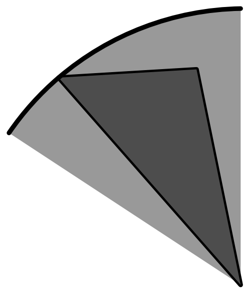
Ľahké 26:

Filip a Šali bežia okolo parku, ktorý má tvar trojuholníka s dĺžkami strán 10, 8 a 5 m metrov. Každý z nich beží celý čas rovnako rýchlo, no každý z nich rôznou rýchlosťou. Ako najďalej od seba Filip a Šali môžu byť?

Výsledok: 10 m

Riešenie:

Najdlhšia strana je najdlhšia vzdialenosť v každom trojuholníku, čo znamená, že Filip a Šali môžu byť najviac 10 m od seba. Aby sme si to ukázali poriadne, pozrime sa na obrázok. Vidíme na ňom časť kruhu, v ktorej sa nachádza náš trojuholník. Jeden z jeho vrcholov je v jeho strede a druhý na jeho obvode. Najdlhšia strana trojuholníka, ktorá ich spája, je zároveň polomerom tejto časti kruhu. Tretí vrchol trojuholníka musí byť niekde vnútri kruhu, pretože od stredu je vzdialený menej ako 10 m. Keďže všetky tri vrcholy ležia v tomto kruhu, musí tam byť aj celý trojuholník. To znamená, že najdlhšia strana trojuholníka je naozaj najdlhšou vzdialenosťou v ňom.



Ľahké 27:

Floro sa opýtal každého z desiatich ľudí, o ktorých vedel, že vždy buď hovoria pravdu, alebo klamú, otázku: „Koľkí z vás sú klamári?“. Dostal odpovede 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10. Koľkí z nich sú klamári?

Výsledok: 9

Riešenie:

Pozrime sa na odpovede, ktoré Floro dostal. Sú rôzne, a pritom každá z nich môže byť pravdivá. Jediná z možných odpovedí, ktorú nikto nepovedal, je 0, tú by však museli povedať všetci. Určite teda niekto klame. Keďže odpovede, ktoré Floro dostal, sú rôzne, vieme, že jedna z nich musí byť pravdivá. To znamená, že tam je len jeden človek, ktorý hovorí pravdu, a teda zvyšní deviati sú klamári.

Ľahké 28:

V kine je 12 sedadiel v jednom rade. Každý vedúci chce sedieť tak, aby na sedadlách vedľa neho nesedel nikto iný. Koľko najviac a koľko najmenej vedúcich môže sedieť v jednom rade tak, aby si tam nemohol sadnúť už nikto iný?

Výsledok: 6 a 4

Riešenie:

Keď chceme usadiť čo najviac vedúcich, tak chceme, aby medzi každými dvoma bolo čo najmenej voľného miesta. Medzi každými dvoma vedúcimi musí byť aspoň jedno voľné miesto, preto ak ich chceme usadiť najviac, ako sa dá, tak medzi dvoma vedúcimi stále vynecháme len práve jedno miesto a začneme od kraja. Na ľavý koniec usadíme vedúceho a vedľa neho necháme jedno miesto voľné a takto pokračujeme ďalej. Takýchto dvojíc vedúci-voľno je na dvanástich sedadlách 6.

Keď ich chceme usadiť naopak najmenej, chceme, aby medzi každými dvomi vedúcimi bolo čo najviac voľných miest, a rovnako, aby na začiatku a na konci radu bolo čo najviac miesta. Medzi dvomi vedúcimi môžu byť najviac dve prázdne miesta. Ak by boli tri, tak si na to stredné môže sadnúť ďalší vedúci. Na začiatku a na konci môže byť len jedno voľné miesto, lebo inak by si na sedadlo na kraji už mohol niekto sadnúť. Takže nám vznikli trojice sedadiel voľno-vedúci-voľno, ktoré môžeme vedľa seba ukladať. Na 12 sedadiel sa vmestia práve 4 takéto trojice.

Ľahké 29:

Rišo sa v sobotu rozhodol, že si prečíta knižku. Nakoniec z nej prečítal iba 12 strán, a keď spočítal čísla všetkých strán, ktoré prečítal, dostal súčet 2022. Určte, na ktorej strane začal, ak strany, ktoré čítal, nasledovali hneď za sebou.

Výsledok: 163

Riešenie:

Označme si ako x číslo prvej strany, ktorú Rišo prečítal. Ďalšie strany sú teda $x + 1$, $x + 2$ a tak ďalej. Keď ich všetky sčítame, dostaneme:

$$
\begin{aligned}
2022 &= x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + \\
&\quad + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) + (x+10) + (x+11), \\
2022 &= 12 \cdot x + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 12 \cdot x + 66.
\end{aligned}
$$

Z toho vyplýva, že 2022 je o 66 viac ako $12 \cdot x$. Preto $12 \cdot x$ je $2022 - 66 = 1956$, čiže x je $1956 : 12 = 163$. Rišo teda začal na strane 163.

Ľahké 30:

Na trhovisku vymieňajú ovocie podľa nasledujúcich pravidiel:

- jeden banán sa dá vymeniť za jedno jablko a dve hrušky (a naopak),
- dve jablká sa dajú vymeniť za jeden banán a jednu hrušku (a naopak).

Za koľko hrušiek možno vymeniť jeden banán?

Výsledok: 5 hrušiek

Riešenie:

Pozrime sa na to, čo dostaneme, ak máme na začiatku dva banány. Vieme ich oba vymeniť podľa prvého pravidla za dve jablká a štyri hrušky. Dve jablká môžeme meniť ešte ďalej podľa druhého pravidla a dostaneme za ne jeden banán a hrušku. Za dva banány sme teda dostali jeden banán a päť hrušiek. Čiže keď si odmyslíme jeden z banánov, čo sme mali na začiatku, a ten, čo sme mali na konci, tak dostávame, že jeden banán má hodnotu piatich hrušiek.

Stredné

Stredné 1:

V parku je sto stromov. Park rozdelíme na päť rovnakých častí, pričom v každej časti je rovnaký počet stromov. V dvoch z nich sú zasadené listnaté stromy. Ak rozdelíme časti parku s listnatými stromami opäť na päť rovnakých častí, tak tri z týchto piatich častí tvoria lipy. Ostatné listnaté stromy sú topole. Koľko je v parku topoľov?

Výsledok: 16

Riešenie:

Keď park rozdelíme na päť rovnakých častí, každá časť bude obsahovať $100 : 5 = 20$ stromov. V dvoch z týchto častí sú listnaté stromy. Listnatých stromov je teda dokopy $2 \cdot 20 = 40$. Ďalej, ak rozdelíme 40 listnatých stromov na 5 rovnakých častí, dostaneme v každej skupine $40 : 5 = 8$ stromov. Vieme, že v troch z týchto častí sú lipy a zvyšné časti sú topole. To znamená, že topole sú vo zvyšných dvoch častiach. Topoľov teda musí byť $8 \cdot 2 = 16$.

Stredné 2:

Otec Erik rozdeľoval svoje dukáty medzi svojich troch synov. Prvému dal tretinu všetkých dukátov, druhému polovicu zo všetkých dukátov a tretiemu ostalo päť dukátov. Koľko dukátov mal otec Erik na začiatku?

Výsledok: 30

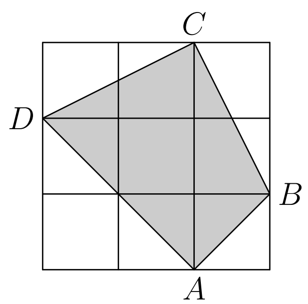
Riešenie:

Aby sa nám s dukátmi dobre pracovalo a nemuseli sme pracovať so zlomkami, tak si dukáty na začiatok predrozdelíme na rovnaké kôpky. Keďže chceme jednoducho vedieť zobrať polovicu dukátov (polovicu kôpok) aj tretinu, tak by bolo vhodné, aby sa počet kôpok dal deliť aj dvomi, aj tromi – takým číslom je napríklad 6.

Rozdeľme si preto dukáty na 6 rovnakých kôpok. Erik dal prvému synovi tretinu (to znamená 2 kôpky), druhému synovi polovicu (3 kôpky) a tretiemu synovi zostala $6 - 2 - 3 = 1$ kôpka. Zo zadania vieme, že to bolo 5 dukátov, a keďže všetky kôpky boli rovnaké, tak Erik mal na začiatku $6 \cdot 5 = 30$ dukátov.

Stredné 3:

Matúš si kupoval na terasu malý koberec. Na terase mal štvorcové dlaždice so stranou dlhou 6 centimetrov a na koberec si vyhradil priestor, aký môžete vidieť na obrázku. Koľko centimetrov štvorcových koberca potrebuje, ak ním chce pokryť celý vyhradený priestor?

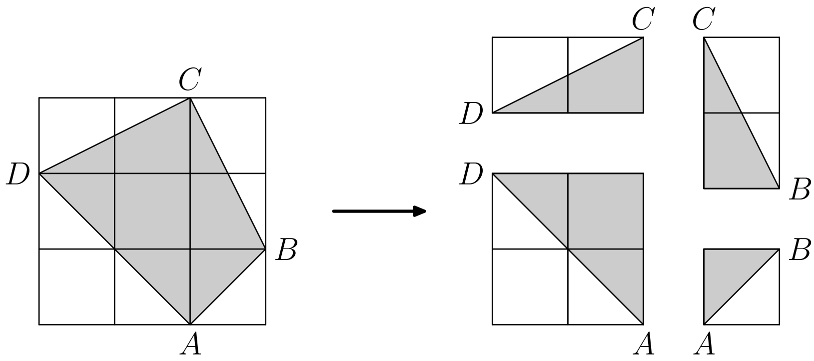


Výsledok: $162\,\mathrm{cm}^2$

Riešenie:

Vieme, že uhlopriečka v obdĺžniku rozdeľuje obdĺžnik na dve časti s rovnakým obsahom. Na obrázku vidíme, ako si môžeme rozdeliť celú terasu na menšie obdĺžniky tak, aby jednotlivé strany koberca boli uhlopriečkami daných obdĺžnikov. To znamená, že čierna časť v každom z týchto obdĺžnikov tvorí polovicu jeho obsahu, a preto aj celý koberec zaberá polovicu obsahu terasy.

Keďže jedna dlaždica má stranu dlhú 6 cm, strana terasy má $3 \cdot 6 = 18$ cm. Celá terasa má potom $18 \cdot 18 = 324\,\text{cm}^2$. Matúš teda potrebuje $324 : 2 = 162\,\text{cm}^2$ koberca.



Stredné 4:

Pinocchio má špeciálny nos, ktorý sa zväčší na dvojnásobok svojej dĺžky vždy, keď Pinocchio zaklame, a skráti sa o 2 cm vždy, keď povie pravdu. Pinocchio si meral svoj nos pri raňajkách a nameral 6 cm. Odvtedy povedal dvakrát pravdu a dvakrát klamal. Aký najdlhší môže mať nos?

Výsledok: 20 cm

Riešenie:

Na raňajkách má nos Pinocchia 6 cm a vieme, že Pinocchio dvakrát klamal a dvakrát hovoril pravdu, avšak nevieme, v akom poradí. Označme si klamstvo ako K (vtedy vieme, že sa nos dvakrát zväčší), pravdu ako P (vtedy sa nos zmenší o 2 cm) a vypíšme si všetky možnosti, ako mohol Pinocchio hovoriť, a k nim to, aký dlhý nos na konci dňa mal:

1. $KKPP \longrightarrow (6 \cdot 2 \cdot 2) - 2 - 2 = 20$
2. $KPKP \longrightarrow ((6 \cdot 2 - 2) \cdot 2) - 2 = 18$
3. $KPPK \longrightarrow (6 \cdot 2 - 2 - 2) \cdot 2 = 16$
4. $PPKK \longrightarrow (6 - 2 - 2) \cdot 2 \cdot 2 = 8$
5. $PKPK \longrightarrow (((6 - 2) \cdot 2) - 2) \cdot 2 = 12$
6. $PKKP \longrightarrow ((6 - 2) \cdot 2 \cdot 2) - 2 = 14$

Rozobrali sme všetky možnosti a vidíme, že Pinocchio môže mať po dvoch klamstvách a dvoch pravdách nos dlhý najviac 20 cm.

Stredné 5:

Viki mala číslo a zaokrúhlila ho na tisícky. Dostala číslo o 476 väčšie ako pôvodné číslo. Potom sa rozhodla, že toto číslo sa jej nepáči a zaokrúhli pôvodné číslo radšej na stovky. Aký je rozdiel pôvodného a nového čísla?

Výsledok: 24

Riešenie:

Keďže sa zaoberáme zaokrúhľovaním na tisícky, zaujímajú nás iba čísla na mieste stovák, desiatok a jednotiek. Pôvodné číslo sa pri zaokrúhľovaní na tisícky zväčšilo, teda sme ho zaokrúhľovali nahor. Zväčšilo sa o 476, teda 476 je toľko, koľko chýbalo do najbližšej tisícky. Pôvodné číslo tým pádom malo na posledných troch miestach číslo $1000 - 476 = 524$. Ak číslo, ktoré má na posledných troch miestach číslo 524, zaokrúhlime na stovky, dostaneme číslo, ktoré má na posledných troch miestach 500. Rozdiel pôvodného a nového čísla je preto $524 - 500 = 24$.

Stredné 6:

O čísle povieme, že je pekné, ak je dvojciferné a jedna jeho cifra je dvakrát väčšia ako tá druhá. Jano si myslí nejaké pekné číslo. Na otázku, ktoré to je, odpovedal: „Ak moje číslo vydelím rozdielom jeho cifier, dostanem pekné číslo. Ak ho vynásobím rozdielom jeho cifier, dostanem tiež pekné číslo.“ Aké číslo si Jano mohol myslieť? Napíšte všetky možnosti.

Výsledok: 12, 21, 24, 42

Riešenie:

Rozmyslime si, aké pekné čísla existujú a či spĺňajú Janov popis. Všetky sú dvojciferné, takže prejdeme možné prvé cifry podľa veľkosti a pozrieme sa, či k nim vieme pridať vhodnú druhú cifru.

- Ak je prvá cifra 1, tak aby sme dostali pekné číslo, druhá cifra musí byť 2, pretože 1 nemá od seba dvakrát menšiu cifru. Číslo 12 má rozdiel cifier 1, takže ak ho ním vynásobíme alebo vydelíme, zostane nám pekné číslo.
- Ak je prvá cifra 2, druhá cifra môže byť buď jej polovicou (čiže 1), alebo jej dvojnásobkom (čiže 4). Číslo 21 má rozdiel cifier 1, takže sa zachová, ak ho ním vynásobíme alebo vydelíme. Číslo 24 má rozdiel cifier 2, po vydelení 2 dostaneme číslo 12, čo je pekné číslo, podobne po vynásobení dostaneme 48, čo je tiež pekné číslo.
- Ak je prvá cifra 3, druhá cifra nemôže byť jej polovicou, takže musí byť jej dvojnásobkom, čiže 6. Rozdiel cifier je 3, ale $3 \cdot 36$ už nie je dvojciferné (teda ani pekné) číslo. Takže toto číslo si Jano myslieť nemohol.
- Ak je prvá cifra 4, druhá cifra môže byť buď 2 (polovica) alebo 8 (dvojnásobok). Číslo 42 má rozdiel cifier 2, pričom $42 : 2 = 21$ a $2 \cdot 42 = 84$ sú pekné čísla, takže toto číslo si Jano myslieť mohol. Naopak číslo 48 má rozdiel cifier 4 a $4 \cdot 48$ nie je dvojciferné (teda ani pekné) číslo, takže 48 neprichádza do úvahy.

Všetky pekné čísla, ktorých prvá cifra je aspoň 5, majú dvojnásobok (alebo nejaký vyšší násobok) rovný alebo väčší ako sto – je trojciferný, a preto nie je pekným číslom. Ak by malo existovať číslo, ktoré spĺňa Janov popis a jeho prvá cifra je aspoň 5, rozdiel jeho cifier by musel byť menší ako 2, takže 0 alebo 1. Žiadne pekné číslo nemôže mať rozdiel cifier 0 (jediné číslo, ktoré si je samé dvojnásobkom je 0) a jediné cifry, ktorých rozdiel je 1 a jedna je dvojnásobok druhej, sú 1 a 2. Takže všetky ďalšie pekné čísla budú mať veľký rozdiel cifier, a preto nebudú spĺňať Janov popis. Jano si preto mohol myslieť len čísla 12, 21, 24 a 42.

Stredné 7:

Kubo sa bol lyžovať, avšak musel vyjsť na vysoký kopec. Zakaždým dokázal ísť 6 sekúnd hore rýchlosťou 15 metrov za sekundu. Potom bol už vyčerpaný a 11 sekúnd sa šmýkal späť dole kopcom rýchlosťou 7 metrov za sekundu. Ako dlho mu potrvá vyjsť na kopec, ak musí prejsť jeden kilometer?

Výsledok: 1196 sekúnd (19 minút a 56 sekúnd)

Riešenie:

Na začiatku šiel Kubo do kopca 6 sekúnd, za ktoré prešiel $6 \cdot 15 = 90$ metrov. Do konca kopca mu preto ostáva vyjsť už len $1000 - 90 = 910$ metrov. Teraz musí pokračovať v cykle, v ktorom najprv 11 sekúnd klesá smerom dole, za ktoré prejde $11 \cdot 7 = 77$ metrov. Následne ide opäť hore 6 sekúnd, za ktoré prejde $6 \cdot 15 = 90$ metrov, čo je o $90 - 77 = 13$ metrov viac. Preto v jednom takom cykle, ktorý trvá $11 + 6 = 17$ sekúnd, vystúpa o 13 metrov, pričom počas trvania cyklu sa nikdy neocitne vyššie ako na jeho konci. Keďže mu ostáva vyjsť 910 metrov, potrvá mu $910 : 13 = 70$ cyklov, kým sa dostane hore. Keďže jeden cyklus trvá 17 sekúnd, 70 cyklov potrvá $70 \cdot 17 = 1190$ sekúnd, ku ktorým potrebujeme pričítať ešte sekundy z prvého stúpania, preto Kubovi potrvá výstup na kopec spolu $1190 + 6 = 1196$ sekúnd.

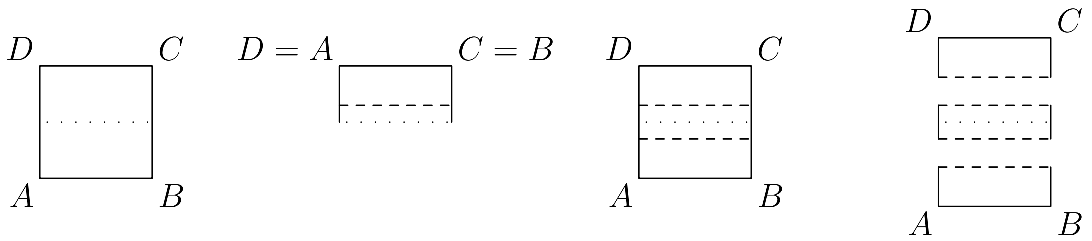
Stredné 8:

Samo mal na papieri nakreslený štvorec $ABCD$ s obsahom 36. Papier potom preložil tak, aby strana AB bola na strane CD. Potom vzal nožnice a papier rozstrihol rovnobežne s týmito dvoma stranami, ale nestrihal cez prehyb. Aký je súčet obvodov všetkých obdĺžnikov, ktoré takto Samovi vznikli?

Výsledok: 48

Riešenie:

Keď papier znova narovnáme, uvidíme, že sme dostali 3 obdĺžniky. Prvý predstavuje časť papiera od AB po miesto prestrihnutia, druhý časť medzi dvoma prestrihnutiami (táto časť obsahuje aj miesto prehybu papiera) a posledná časť je od prestrihnutia po stranu CD. Z obrázku vidíme, že súčet dĺžok kratších strán týchto troch obdĺžnikov je rovný dvom stranám štvorca. Zároveň, keďže strih bol rovnobežný s AB a CD, tak dlhšia strana každého z obdĺžnikov je rovnako dlhá ako AB a CD. Dokopy je preto súčet dĺžok dlhších strán týchto obdĺžnikov rovný šiestim stranám štvorca.



Celkovo je súčet obvodov týchto obdĺžnikov rovný ôsmim stranám pôvodného štvorca. Obsah štvorca bol 36, čiže jeho strana má dĺžku 6. Výsledný obvod je $8 \cdot 6 = 48$.

Stredné 9:

Deti na sústredení si chcú vyrobiť novú vlajku. Mala by byť tvorená troma rôznofarebnými vodorovnými pruhmi. K dispozícii majú rovnaké množstvo červenej, modrej, zelenej, žltej a bielej látky. Koľko rôznych variantov vlajok môžu vytvoriť, ak na vlajke musí byť zelený pruh? (Poznámka: Jednu vlajku vieme otočiť dvoma spôsobmi, čo považujeme za dva rôzne varianty vlajky.)

Výsledok: 36

Riešenie:

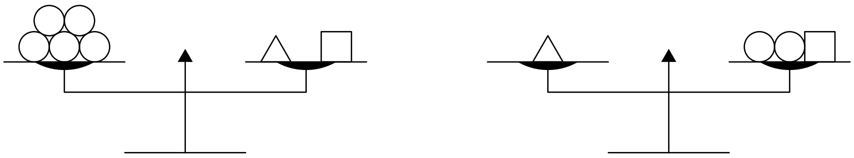
Zelený pruh môže byť buď hore, v strede, alebo dole. Spolu teda máme tri rôzne pozície zeleného pruhu.

Ku zelenej farbe môžeme pridať už len dve iné rôzne farby. Jedna z nich bude určite na vlajke vyššie ako tá druhá, keďže pruhy sú vodorovné. Na pozícii vyššej z týchto dvoch farieb môže byť jedna zo všetkých štyroch zvyšných farieb (červená, modrá, žltá alebo biela), na nižšej pozícii už môže byť len jedna zo zvyšných troch (keďže jednu zo štyroch sme použili na vrchný pruh). Keďže na prvú pozíciu môžeme zvoliť 4 a na druhú 3 farby, spolu máme $4 \cdot 3 = 12$ možností, ako vybrať takúto dvojicu pruhov.

Toľko rôznych dvojíc máme ku každej pozícii zeleného pruhu, preto máme spolu $12 \cdot 3 = 36$ rôznych variantov vlajky.

Stredné 10:

Dano sa hral s váhami. To, ako vážil, môžeme vidieť na obrázku. Koľko guľôčok Dano potrebuje na vyváženie dvoch trojuholníkov?



Výsledok: 7 guľôčok

Riešenie:

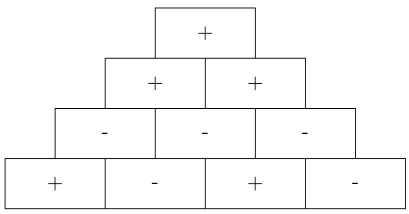
Na druhej váhe vidíme, že jeden trojuholník váži rovnako ako 2 guľôčky a štvorec. Predstavme si, že by sme na obe strany váhy pridali štvorec, potom by váha bola stále vyvážená. To znamená, že trojuholník a štvorec vážia rovnako ako 2 guľôčky a 2 štvorce.

Keď sa pozrieme na prvú váhu, vidíme, že 5 guľôčok váži rovnako ako trojuholník a štvorec. Ale keďže trojuholník a štvorec vážia rovnako ako 2 guľôčky a 2 štvorce a zároveň rovnako ako 5 guľôčok, tak to znamená, že 2 guľôčky a 2 štvorce vážia rovnako ako 5 guľôčok. Z toho vyplýva, že 2 štvorce vážia rovnako ako 3 guľôčky (odoberieme 2 guľôčky z oboch strán).

Podľa druhej váhy trojuholník váži rovnako ako 2 guľôčky a štvorec, preto 2 trojuholníky budú vážiť rovnako ako 4 guľôčky a 2 štvorce. No a keďže 2 štvorce vážia rovnako ako 3 guľôčky, tak potom 2 trojuholníky vážia rovnako ako $4 + 3 = 7$ guľôčok.

Stredné 11:

V pyramíde je na políčku napísané $+$, ak v dvoch políčkach priamo pod ním je rovnaké znamienko. Naopak je tam $-$, ak dané políčka majú rôzne znamienka. Na nasledujúcom obrázku vidíme príklad, ako môže byť takáto štvorposchodová pyramída vyplnená podľa týchto pravidiel. Koľkými spôsobmi vieme vyplniť spodné poschodie pyramídy, ak v najvyššom políčku chceme získať $+$?



Výsledok: 8

Riešenie:

Začnime tým, že by sme vyplnili prvé tri políčka v spodnom poschodí pyramídy. Potom by sme vedeli určiť, aké znamienka sú v dvoch políčkach priamo nad nimi, a teda aj prvé políčko v druhom najvyššom poschodí. Keďže vieme, že v najvyššom políčku je $+$, tak zostávajúce znamienko v druhom poschodí by sme vedeli doplniť. Podobne by sme dokázali podopĺňať znamienka až na spodný riadok (ak znamienko vyššie je $-$, tak druhé zo znamienok pod ním je opačné podľa zadania). Takto by sme dostali pyramídu, ktorá vyhovuje zadaniu.

Pre každú trojicu zo začiatku vyplnených políčok teda existuje len jedna možnosť, ako vieme doplniť zmaniemka v pyramíde. Keďže na každej z troch pozícií môžu byť dve znamienka, takýchto trojíc máme $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, čo je výsledný počet spôsobov, ako môžeme vyplniť spodný riadok pyramídy, aby sme v najvyššom políčku dostali $+$. Pri ostatných spôsoboch (tiež ich je 8) dostaneme v najvyššom políčku $-$.

Stredné 12:

Lujza a jej dedko dnes oslavujú narodeniny. Dokopy majú 91 rokov a Lujzin dedko má presne toľko rokov, koľko ona mesiacov. Koľko rokov má Lujza?

Výsledok: 7

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že vek Lujzinho dedka je 12-krát väčší ako ten Lujzin. Jednému Lujzinmu roku zodpovedá 12 dedkových rokov. To znamená, že z každých 13 rokov súčtu ich vekov zodpovedá 12 rokov dedkovi a 1 rok Lujze. Ľahko spočítame, že $91 : 13 = 7$, a teda Lujzin vek je $7 \cdot 1 = 7$ rokov a dedkov vek je $7 \cdot 12 = 84$ rokov.

Stredné 13:

Mirka sa pokúša usporiadať 32 bielych a 32 čiernych kociek s hranou dĺžky 1 do jednej veľkej kocky $4 \times 4 \times 4$. Chce, aby na povrchu veľkej kocky bolo čo najviac bielej. Aký najväčší povrch veľkej kocky môžu tvoriť biele kocky?

Výsledok: 72

Riešenie:

Na povrchu veľkej kocky s rozmermi $4 \times 4 \times 4$ sa nachádza spolu 56 kociek. Z toho Mirka vidí tri steny ôsmich kociek, dve steny 24 kociek a jednu stenu zvyšných 24 kociek. Kociek, ktoré nemajú žiadnu stenu na povrchu veľkej kocky (čiže sú v jej vnútri) je 8. Keďže Mirka chce vidieť čo najviac bielych stien, čierne kocky musí dať na miesta, kde ich nebude vidno - dovnútra kocky. Potom jej ostane ešte $32 - 8 = 24$ čiernych kociek. Tie chce dať na také miesta, aby videla čo najmenej čiernych stien. To sú tie kocky, kde Mirka uvidí iba po jednej ich stene. Tých je tiež 24. Dokopy Mirka vidí na veľkej kocke $8 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 96$ stien kociek, pričom (aspoň) 24 musí byť čiernych. To znamená, že biele kocky môžu tvoriť zvyšný povrch veľkej kocky, čo je $96 - 24 = 72$ stien.

Stredné 14:

Žanetka má špeciálne hracie kocky, na ktorých je jednotka oproti dvojke, trojka oproti štvorke a päťka oproti šestke. Zobrala osem takýchto kociek a zlepila ich do jednej veľkej kocky. Aký najväčší a aký najmenší súčet čísel na vonkajších stenách zlepenej kocky mohla Žanetka dosiahnuť?

Výsledok: Najväčší súčet: 96, najmenší súčet: 72

Riešenie:

Z ôsmich kociek musí Žanetka poskladať kocku $2 \times 2 \times 2$. Po umiestnení do veľkej kocky uvidí z každej malej kocky práve tri steny. Aby bol celkový súčet čísel čo najväčší/najmenší, musí byť aj súčet čísel na týchto troch stenách čo najväčší/najmenší. Z každej dvojice protiľahlých stien Žanetka uvidí práve jednu. Žanetka má dvojice 1 a 2, 3 a 4, 5 a 6. Najväčší súčet tvoria steny $2 + 4 + 6 = 12$ a najmenší súčet tvoria steny $1 + 3 + 5 = 9$. To znamená, že najväčší celkový súčet je $12 \cdot 8 = 96$ a najmenší celkový súčet je $9 \cdot 8 = 72$.

Stredné 15:

Aký je najväčší možný počet cifier, ktoré môžeme odstrániť z 1000-ciferného čísla 20192019 . . . 2019 tak, aby sme získali číslo s ciferným súčtom 2019?

Výsledok: 774

Riešenie:

Najväčší možný počet cifier, ktoré môžeme odstrániť, dosiahneme tak, že číslo s ciferným súčtom 2019 vytvoríme súčtom čo najmenej cifier. To zase urobíme tak, že použijeme čo najviac deviatok, keďže to je najväčšia cifra k dispozícii. Avšak samotné 2019 nie je deliteľné deviatimi, preto musíme nájsť najbližší menší násobok deviatky, čo je 2016. To už sme použili $2016 : 9 = 224$ cifier, zatiaľ samé deviatky. Kedže z každej zo štyroch rôznych číslic v celom čísle je po $1000 : 4 = 250$, tak 224 deviatok môžeme použiť. K tomu ešte musíme pripočítať 3, a to sa na najmenej cifier dá urobiť ako $2 + 1$, čiže takto použijeme ďalšie dve cifry. Dokopy teda na konci musíme mať aspoň 226-ciferné číslo. Tým pádom sme mohli vyškrtnúť maximálne $1000 - 226 = 774$ cifier.

Stredné 16:

V krajine Číselkovo žijú len kladné celé čísla. Muži a chlapci sú párne čísla a ženy a dievčatá sú nepárne čísla. Manželia majú ihneď po svadbe deti, a tými sú všetky čísla, ktoré delia ich súčin bezo zvyšku. Súčet hodnôt všetkých detí manželov Kováčovcov je 28. Otec Kováč má nižšiu hodnotu ako aspoň jeden zo synov. Určte hodnoty pána a pani Kováčových.

Výsledok: pán Kováč 4, pani Kováčová 3

Riešenie:

Vieme, že každé číslo je určite deliteľné 1 a samým sebou. Preto súčin manželov určite nie je väčší ako 27, pretože ak si vezmeme číslo 28, tak vieme, že medzi jeho delitele patrí 28 a 1, $28 + 1 = 29$, a teda aj každé ďalšie číslo by malo určite väčší súčet deliteľov. Keďže pán Kováč je párne číslo a pani Kováčová je nepárne číslo, ich súčin bude vždy párne číslo, teda jeden z deliteľov je určite 2. Zároveň vieme, že súčin hodnôt pána a pani Kováčových bude mať okrem čísla 2 aj iného párneho deliteľa, pretože otec má hodnotu aspoň 2, no zároveň je hodnotou menší ako aspoň jeden z ich synov. Hľadáme teda násobok 2 menší ako 28, ktorý má aspoň jedného ďalšieho párneho deliteľa. Vyhovujúce čísla sú 4, 8, 12, 16, 20, 24. Z týchto čísel má súčet deliteľov 28 iba číslo 12, ktorého delitele sú 1, 2, 3, 4, 6 a 12. Aby mal pán Kováč menšiu hodnotu ako aspoň jeden zo synov, jeho hodnota môže byť 2, 4 alebo 6. Ak by bola jeho hodnota 2 resp. 6, pani Kováčová by musela mať hodnotu 6, resp. 2, a to nie je nepárne číslo, preto vieme, že pán Kováč má hodnotu 4 a pani Kováčová má hodnotu 3.

Stredné 17:

Ked sa Števa opýtate, aké je jeho obľúbené prirodzené číslo, tak vám iba vyhýbavo odvetí: „Keď moje obľúbené číslo pričítate k 42 a odčítate ho od 42, dostanete dve čísla, ktorých podiel je päť.“ Aké je Števovo obľúbené číslo?

Výsledok: 28

Riešenie:

Števovo obľúbené číslo si označme ako x. Keď ho pričítame a odčítame od čísla 42, tak môžeme väčšie z čísel označiť ako $42+x$ a menšie ako $42-x$. Súčet týchto dvoch čísel je $(42+x)+(42-x) = 42+x+42-x = 84$. Môžeme si všimnúť, že neznáme čísla x sa nám odčítali a súčet je dvojnásobok čísla 42. Číslo 84 vieme rozdeliť na 6 rovnakých častí. Keďže jedno z dvoch vzniknutých čísel je päťkrát väčšie než druhé, bude sa rovnať piatim z týchto šiestich častí a menšie číslo sa bude rovnať jednej časti. Jedna časť z 84 je $84 : 6 = 14$, čo je menšie číslo. Väčšie číslo sa rovná piatim častiam, čiže $14 \cdot 5 = 70$. Potrebujeme však zistiť, aké číslo Števo pričítaval a odčítaval od 42. To zistíme tak, že od 70 odčítame 42 alebo od 42 odčítame 14. Števovo obľúbené číslo je teda $70-42 = 42-14 = 28$.

Stredné 18:

Rodina skladajúca sa z otca Števa, mamy Mirky, dcéry Karin a dvoch synov Peťa a Maťa chce ísť na výlet päťmiestnym autom. Koľkými spôsobmi sa môžu posadiť, ak šoférovať môžu iba Mirka alebo Števo a Karin musí sedieť vzadu?

Výsledok: 36

Riešenie:

Poďme postupne obsadzovať miesta v aute. Na mieste vodiča môžu sedieť len dvaja rôzni ľudia. Na mieste spolujazdca síce štyria (všetci okrem Karin), no jeden z nich už isto sedí na mieste vodiča, preto nám tam ostávajú len traja. Na prvom mieste vzadu môže sedieť ľubovoľný zvyšný člen rodiny, teda traja rôzni ľudia. Tak isto na ďalšom mieste vzadu môžu sedieť obaja zvyšní, teda dvaja rôzni ľudia. Posledné miesto sa zvýši tomu, čo ešte nikde nesedí. Keďže hľadáme počet možností rôznych posadení, tak vynásobíme počty ľudí z jednotlivých sedadiel, teda $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$. Preto máme 36 rôznych možností, ako sa rodina môže posadiť.

Stredné 19:

Na výlete je 20 detí. Spomedzi nich má 13 modré oči, 15 tmavé vlasy, 17 má 32 zubov a 19 meria viac ako 160 cm. Koľko detí má určite všetky štyri uvedené vlastnosti?

Výsledok: 4

Riešenie:

Pozrime sa na to, koľko detí nemá jednotlivé vlastnosti: 7 detí nemá modré oči, 5 detí nemá tmavé vlasy, 3 deti nemajú 32 zubov a 1 dieťa nemeria viac ako 160 cm. Nazvime *hľadaným* také dieťa, ktoré má všetky 4 vlastnosti. Potom stačí, aby dieťa nemalo hocijakú z týchto vlastností, a už nebude *hľadané*. V najhoršom prípade (najmenej *hľadaných* detí) bude teda každému dieťaťu chýbať najviac jedna vlastnosť k „hľadanosti“. Vtedy bude *hľadaných* detí $20 - 7 - 5 - 3 - 1 = 4$. To znamená, že 4 deti majú určite všetky 4 vlastnosti.

Stredné 20:

Roman si myslí číslo. Ak k nemu pripočíta 3 a výsledok vydelí 5, dostane číslo štyrikrát menšie, ako keby od mysleného čísla odčítal 7. Aké číslo si Roman myslí?

Výsledok: 47

Riešenie:

Pozrime sa na číslo, ktoré Roman dostane, ak k myslenému číslu pripočíta 3 a výsledok vydelí 5. Označme si toto číslo x. Vieme, že ak toto číslo vynásobíme 5 a odpočítame 3, dostaneme Romanovo pôvodné číslo. Romanovo číslo však dostaneme aj vtedy, keď číslo x vynásobíme 4 a pripočítame 7.

Vieme, že $5 \cdot x - 3 = 4 \cdot x + 7$, keďže nám po oboch operáciách vzniklo to isté číslo. Na ľavej strane máme o jedno x viac ako na pravej strane. Hodnota x preto musí byť taká, aby vyrovnala rozdiel v číslach pravej strany oproti ľavej. Aký je rozdiel v číslach pravej a ľavej strany? Na ľavej strane máme o 7 viac, ako keby tam nebolo nič, a na pravej máme o 3 menej, ako keby tam nebolo nič, takže sa dohromady líšia o $7 + 3 = 10$. Takže aby sa pravá strana rovnala ľavej, naše x musí byť 10.

Romanovo číslo je tým pádom $5 \cdot 10 - 3 = 47$. Môžeme si to ešte overiť aj druhým spôsobom, ktorý dáva $4 \cdot 10 + 7 = 47$.

Ťažké

Ťažké 1:

Symboly $\diamondsuit$, $\spadesuit$ a $\clubsuit$ nahrádzajú kladné celé čísla. Súčty čísel v každom riadku a v každom stĺpci môžeme vidieť na obrázku. Čomu sa rovná $\spadesuit + \diamondsuit - \clubsuit$?

$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	53
$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	47
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	47
52	47	48	

Výsledok: 23

Riešenie:

Pozrime sa na prvý riadok tabuľky, kde máme $1 \cdot \diamondsuit + 2 \cdot \spadesuit = 53$, a zároveň na prvý stĺpec, kde máme $1 \cdot \spadesuit + 2 \cdot \diamondsuit = 52$. Spolu teda máme v prvom riadku a prvom stĺpci $3 \cdot \diamondsuit + 3 \cdot \spadesuit = 105$. Po delení 3 vieme, že $\diamondsuit + \spadesuit = 35$. V druhom riadku vidíme, že $\diamondsuit + \spadesuit + \clubsuit = 47$, no my vieme, že $\diamondsuit + \spadesuit = 35$, teda $35 + \clubsuit = 47$, čiže $\clubsuit = 47 - 35 = 12$. Poznáme už teda súčet $\diamondsuit + \spadesuit = 35$, a zároveň vieme, že $\clubsuit = 12$, a teda vieme, že $\spadesuit + \diamondsuit - \clubsuit = 35 - 12 = 23$.

Ťažké 2:

Kancelárska tlačiareň vie tlačiť buď na jednu, alebo na obe strany papiera. Jednostranná tlač trvá tri sekundy na stranu, kým obojstranná tlač trvá deväť sekúnd na list papiera. Mihál chce vytlačiť článok dlhý osemnásť strán. Môže ho buď vytlačiť celý obojstranne, alebo vytlačiť nepárne strany, vložiť papier späť do tlačiarne a vytlačiť párne strany. Rýchlo si uvedomil, že oba postupy zaberú rovnako veľa času. Koľko sekúnd Mihálovi zaberie vloženie strán naspäť do tlačiarne?

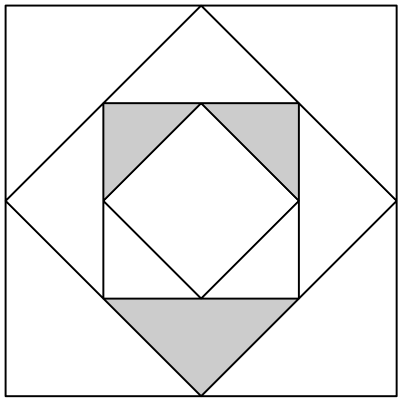
Výsledok: 27

Riešenie:

Keďže článok je dlhý 18 strán a listy papiera majú dve strany, článok bude vytlačený na $18 : 2 = 9$ listov papiera. Ak by článok dlhý 9 listov tlačil obojstrannou tlačou trvajúcou 9 sekúnd na list, trvalo by mu to $9 \cdot 9 = 81$ sekúnd. Ak by článok tlačil jednostrannou tlačou trvajúcou 3 sekundy na stranu, najprv by vytlačil nepárnu stranu na každý z deviatich listov, čo by mu trvalo $9 \cdot 3 = 27$ sekúnd. Potom by vložil papiere znova do tlačiarne a tlačil by 9 párnych strán, čo by mu tiež zabralo $9 \cdot 3 = 27$ sekúnd. Samotné tlačenie jednostrannou tlačou teda trvá $27 + 27 = 54$ sekúnd, a keďže obojstranná tlač má trvať rovnako dlho ako jednostranná tlač aj s vkladaním papierov, tak vkladanie papierov Mihálovi zaberie $81 - 54 = 27$ sekúnd.

Ťažké 3:

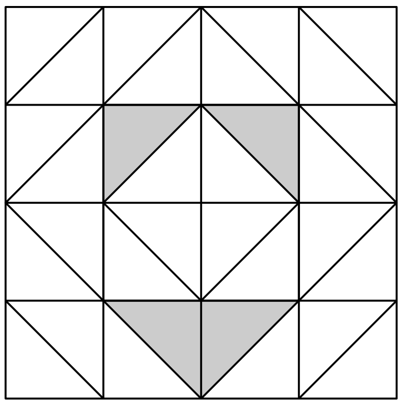
Filip chce namaľovať mozaiku ako na obrázku. Obsah sivej časti je $7\,\text{cm}^2$. Na to, aby mohol kúpiť farbu, potrebuje vedieť, aký je obsah najväčšieho štvorca. Aký je teda jeho obsah?



Výsledok: $56\,\text{cm}^2$

Riešenie:

Mozaiku si vieme rozdeliť na 32 rovnakých malých trojuholníkov ako na obrázku.



Vieme, že obsah sivej časti, ktorú tvoria 4 malé trojuholníky, je $7\,\text{cm}^2$. Najväčší štvorec tvorí 32 trojuholníkov. Keďže $32 : 4 = 8$, jeho obsah je 8-krát väčší ako obsah sivej časti. Z toho už ľahko dopočítame, že hľadaný obsah najväčšieho štvorca je $7 \cdot 8 = 56\,\text{cm}^2$.

Ťažké 4:

Vo vlaku je zaradených 18 vagónov, v ktorých dokopy cestuje 700 ľudí. V každej pätici susedných vagónov cestuje presne 199 ľudí. Koľko ľudí cestuje spolu v 9. a 10. vagóne?

Výsledok: 96

Riešenie:

Očíslujme si vagóny od 1 po 18. Ak pätica vagónov $1-5$ má počet cestujúcich 199 a pätica vagónov $2-6$ tiež, tak to znamená, že vagóny 1 a 6 majú rovnaký počet cestujúcich, lebo vagóny $2-5$ sú v oboch päticiach. Takto môžeme posúvať túto päticu postupne celým vlakom a zistíme, že vagóny s rovnakým zvyškom po delení piatimi majú rovnaký počet cestujúcich (napr. vagóny 1, 6, 11 a 16 vezú všetky rovnaký počet ľudí).

Prvých 15 vagónov (tri neprekrývajúce sa pätice vagónov) majú dokopy $199 \cdot 3 = 597$ cestujúcich. Z toho vyplýva, že v posledných troch vagónoch $(16, 17, 18)$ bude dokopy $700 - 597 = 103$ cestujúcich. Ak vezmeme päticu vagónov $14 - 18$ tak vieme, že v trojici vagónov $16 - 18$ bude 103 cestujúcich, čiže vo vagónoch 14 a 15 bude $199 - 103 = 96$ cestujúcich. Keďže vieme, že vo vagóne 14 je rovnako veľa cestujúcich ako vo vagóne 9 a vo vagóne 15 ako vo vagóne 10, tak vieme povedať, že vo vagónoch 9 a 10 bude spolu 96 cestujúcich.

Ťažké 5:

Mimi si kreslí na steny kocky krížiky. Koľkými spôsobmi môže označiť niekoľko (najmenej žiadne, najviac všetky) stien kocky krížikmi, ak dva spôsoby považuje za rôzne iba vtedy, ak otočením kocky nemôže dostať jeden spôsob z toho druhého?

Výsledok: 10

Riešenie:

Prejdime si všetky počty krížikov, ktoré môže Mimi urobiť. 0 krížikov vie nakresliť 1 spôsobom. 1 krížik vie nakresliť opäť 1 spôsobom, pretože kocku následne môže ľubovoľne otáčať. 2 krížiky vie Mimi nakresliť 2 spôsobmi, a to buď na stenách oproti sebe, alebo na susedných stenách kocky. 3 krížiky dokáže nakresliť znova dvoma spôsobmi, a to na stenách s jedným spoločným vrcholom alebo na dve protiľahlé a jednu ktorúkoľvek inú stenu.

Nakresliť 4, 5 a 6 krížikov je vlastne to isté, ako nakresliť 2, 1 a 0 krížikov. Pri kreslení 4 krížikov sa totiž Mimi môže pozerať na umiestnenie 2 stien bez krížika a na to sú 2 spôsoby. Pre 5 aj 6 krížikov to ďalej bude zakaždým 1 spôsob. Mimi má preto dokopy 10 spôsobov.

Ťažké 6:

Farmár Spišo si chcel do radu posadiť zeleninu. Sadil mrkvu a petržlen, ale nikde neposadil 2 petržleny vedľa seba. Koľkými spôsobmi mohol posadiť 7 kusov zeleniny?

Výsledok: 34

Riešenie:

Úlohu môžeme riešiť aj vypísaním všetkých spôsobov, no vo vzorovom riešení uvedieme iný postup.

Pozrime sa najprv na to, koľko možností by mal Spišo, ak by sadil iba jeden kus zeleniny, potom dva kusy a následne tri kusy zeleniny. Z toho skúsime odvodiť spôsob, ako zistiť počet spôsobov posadenia siedmich kusov zeleniny.

Ak by Spišo sadil iba jeden kus zeleniny, má dva spôsoby ako ho môže posadiť - buď posadí mrkvu, alebo petržlen. Ak by sadil dva kusy zeleniny, tak mrkvu na druhú pozíciu môže posadiť bez ohľadu na to, akú zeleninu posadil ako prvú. Petržlen by mohol posadiť iba vtedy, keď by prvú posadil mrkvu. To nám dokopy dáva 3 spôsoby, pričom v dvoch z nich je posledná zasadená zelenina mrkva a v jednom petržlen.

Ako by to bolo s tromi kusmi zeleniny? Ako tretí by mohol posadiť petržlen iba vtedy, ak by druhá zasadená zelenina bola mrkva - vieme, že to nastáva v dvoch prípadoch. Mrkvu môže Spišo zasadiť bez ohľadu na to, aká bola druhá zasadená zelenina, no vieme, že má 3 možnosti, ako vie zasadiť 2 druhy zeleniny. To znamená, že Spišo má 3 spôsoby, ako posadiť na posledné miesto mrkvu, a 2 spôsoby, ako posadiť na posledné miesto petržlen.

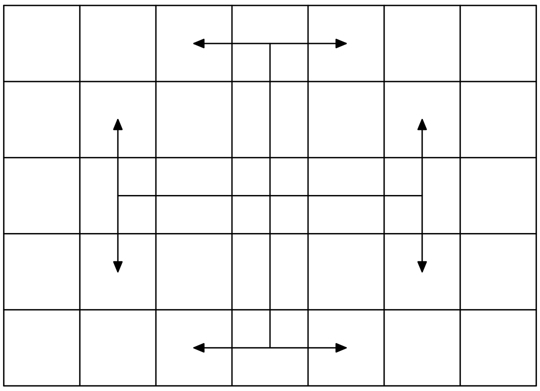
Namiesto toho, aby sme takto počítali ďalej pre viac kusov zeleniny, urobíme si tabuľku, do ktorej budeme značiť počet spôsobov, ktorými vieme zasadiť zeleninu pre rôzny počet kusov zeleniny:

	1 kus	2 kusy	3 kusy	4 kusy	5 kusov	6 kusov	7 kusov
Posledná bude mrkva	1	2	3	5	8	13	21
Posledný bude petržlen	1	1	2	3	5	8	13

Vieme, že mrkva môže byť posledná bez ohľadu na to, aký kus zeleniny je predposledný. Preto hodnotu v tabuľke vždy spočítame ako súčet hodnôt v predchádzajúcom stĺpci. Petržlen môže ísť iba po mrkve, takže počet prípadov, keď je posledný petržlen, je rovný počtu prípadov, keď je posledná mrkva a Spišo sadí o jeden kus zeleniny menej. To znamená, že na posadenie siedmich kusov zeleniny má spišo $21 + 13 = 34$ možností.

Ťažké 7:

Majme šachovnicu 7×5 s čiernym políčkom v ľavom hornom rohu. Koľko najviac koní môžeme na šachovnicu umiestniť tak, aby sa navzájom nehrozovali? Kôň sa na šachovnici pohybuje tak, že môže ísť dve políčka ľubovoľným zo štyroch smerov a potom jedno políčko v kolmom smere (viď obrázok):



Výsledok: 18

Riešenie:

Najprv si šachovnicu rozdelíme na 17 dvojíc políčok (označených rovnakými číslami) a jedno zvyšné políčko (18) tak, aby kôň mohol skočiť z jedného políčka v dvojici na druhé a naopak:

6	5	9	8	10	12	13
7	8	10	11	13	14	15
5	6	7	9	12	11	16
2	4	1	3	14	15	17
1	3	2	4	17	16	18

Teraz si môžeme uvedomiť, že ak by sme umiestnili dva kone na nejaké dve políčka z jednej dvojice, tak by sa tieto dva kone navzájom ohrozovali. Preto môžeme na každú dvojicu položiť najviac jedného koňa. Dvojíc máme 17, posledné políčko nemá dvojicu, teda na túto šachovnicu môžeme dokopy položit najviac 18 koní tak, aby sa navzájom neohrozovali.

Teraz nám už iba stačí nájsť nejaké správne rozostavenie. Najjednoduchšie je uvedomiť si, že kôň stojaci na bielom políčku ohrozuje iba čierne políčka a naopak. Preto ak položíme kone iba na jednu farbu políčok, určite sa navzájom nebudú ohrozovať. Čiernych políčok je na tejto šachovnici presne 18, a teda na ňu takto vieme položiť 18 koní bez toho, aby sa vzájomne ohrozovali, a zároveň vieme, že viac ich tam položiť nevieme.

Ťažké 8:

Kubo má záhradu, v ktorej sadí paradajky. V každom riadku má niekoľko sadeníc, medzi ktorými je vždy 30 centimetrov miesta. Medzi riadkami má medzery 20 centimetrov. Takto sa mu na záhradu vojde práve 50 sadeníc, pričom využije stále celú záhradu (prvý a posledný riadok sú až na okraji záhrady a prvá aj posledná paradajka v každom riadku je tiež celkom na kraji záhrady). Vieme, že ak by medzera medzi riadkami aj medzi paradajkami v riadku bola 25 centimetrov, do tejto záhrady by sa mu vošiel väčší počet sadeníc. Aké rôzne počty sadeníc by mohol takto Kubo mať vysadené?

Výsledok: len 59

Riešenie:

Vieme, že súčin riadkov a počtu paradajok na jednom riadku sa musí rovnať 50. Vypíšme si preto všetky možnosti počtov riadkov a k nim prislúchajúce počty paradajok v jednom riadku.

- **50 riadkov s 1 paradajkou.** Keďže v každom riadku je len jedna paradajka, v riadku nie sú žiadne medzery, preto aj po zmene zostane v každom riadku len 1 paradajka. Medzi riadkami máme aktuálne 49 medzier, pričom každá má 20 cm. Preto má v tomto smere záhrada na dĺžku $49 \cdot 20 = 980$ cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám v tomto rozmere zmestí $980 : 25 = 39$ (zv. 5) celých medzier, ktoré nám určujú 40 riadkov. Keďže je v každom riadku len jedna paradajka, spolu budeme mať 40 paradajok, čo je menej ako 50.

- **1 riadok s 50 paradajkami.** Keďže v riadku máme 50 paradajok, je medzi nimi 49 medzier, ktoré majú spolu $49 \cdot 30 = 1470$ cm. Riadok máme len jeden, a keďže neexistuje medzera medzi riadkami, po zmene nám ostane tiež len jeden riadok. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám riadok, ktorý má šírku 1470 cm, rozdelí na $1470 : 25 = 58$ (zv. 20) celých 25-centimetrových medzier. Tie nám v riadku môžu oddeľovať 59 paradajok, **čo je viac ako 50**.

- **25 riadkov s 2 paradajkami.** Keďže v riadku máme 2 paradajky, je medzi nimi 1 medzera, ktorá má 30 cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám riadok, ktorý má šírku 30 cm, rozdelí na $30 : 25 = 1$ (zv. 5) celú 25-centimetrovú medzeru. Preto sa nám do riadku zmestia 2 paradajky. Medzi riadkami máme aktuálne 24 medzier, pri čom každá má 20 cm. Preto má v tomto smere záhrada na dĺžku $24 \cdot 20 = 480$ cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám v tomto rozmere zmestí $480 : 25 = 19$ (zv. 5) celých medzier, ktoré nám určujú 20 riadkov. Keďže sú v každom riadku 2 paradajky a riadkov je 20, spolu budeme mať 40 paradajok, čo je menej ako 50.

- **2 riadky s 25 paradajkami.** Keďže v riadku máme 25 paradajok, je medzi nimi 24 medzier, ktoré majú $24 \cdot 30 = 720$ cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám riadok, ktorý má šírku 720 cm, rozdelí na $720 : 25 = 28$ (zv. 20) celých 25-centimetrových medzier. Preto sa nám do riadku zmestí 29 paradajok. Medzi riadkami máme aktuálne 1 medzeru, ktorá má 20 cm. Na zväčšenie tejto medzery na 25 cm nemáme priestor, preto budeme mať po zmene len 1 riadok. V tomto jednom riadku budeme mať 29 paradajok, čo je menej ako 50.

- **10 riadkov s 5 paradajkami.** Keďže v riadku máme 5 paradajok, sú medzi nimi 4 medzery, ktoré majú $4 \cdot 30 = 120$ cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám riadok, ktorý má šírku 120 cm, rozdelí na $120 : 25 = 4$ (zv. 20) celé 25-centimetrové medzery. Preto sa nám do riadku zmestí 5 paradajok. Medzi riadkami máme aktuálne 9 medzier, pri čom každá má 20 cm. Preto má v tomto smere záhrada na dĺžku $9 \cdot 20 = 180$ cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám v tomto rozmere zmestí $180 : 25 = 7$ (zv. 5) celých medzier, ktoré nám určujú 8 riadkov. Keďže je v každom riadku 5 paradajok a riadkov je 8, spolu budeme mať $5 \cdot 8 = 40$ paradajok, čo je menej ako 50.

- **5 riadkov s 10 paradajkami.** Keďže v riadku máme 10 paradajok, je medzi nimi 9 medzier, ktoré majú $9 \cdot 30 = 270$ cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám riadok, ktorý má šírku 270 cm, rozdelí na $270 : 25 = 10$ (zv. 20) celých 25-centimetrových medzier. Preto sa nám do riadku zmestí 11 paradajok. Medzi riadkami máme aktuálne 4 medzery, pri čom každá má 20 cm. Preto má v tomto smere záhrada na dĺžku $4 \cdot 20 = 80$ cm. Po zmene dĺžky medzery na 25 cm sa nám v tomto rozmere zmestia $80 : 25 = 3$ (zv. 5) celé medzery, ktoré nám určujú 4 riadky. Keďže je v každom riadku 11 paradajok a riadky sú 4, spolu budeme mať $11 \cdot 4 = 44$ paradajok, čo je menej ako 50.

Toto sú všetky možnosti pôvodného rozloženia záhrady a aj k nim prislúchajúce výsledné počty paradajok. Keďže vieme, že Kubova záhrada má taký rozmer, že pri rozmiestňovaní paradajok po 25 cm sa ich tam vojde viac ako 50, môžeme usúdiť, že tento počet bude práve a len 59.

Ťažké 9:

Máme mriežku 2×6 (2 riadky, 6 stĺpcov). Koľkými spôsobmi na ňu môžeme položiť kachličky veľkosti 2×2 alebo 2×1, ak musíme použit aspoň jednu kachličku 2×2?

Výsledok: 30

Riešenie:

Na mriežku vieme položiť buď 3, 2 alebo 1 kachličku veľkosti 2×2. Pozrime sa na to, koľko možností rozloženia kachličiek máme pre každú z týchto možností.

V prípade **3 kachličiek** 2×2 máme len **1** možnosť - uložiť ich vedľa seba, pri čom zaberú celú plochu, iná možnosť pri takom počte neexistuje.

Ak máme **2 kachličky** 2×2, môžeme mať buď obe tieto kachličky na kraji, práve jednu na kraji, alebo žiadnu z nich na kraji.

- Ak máme obe na kraji, vzniká medzi nimi voľná mriežka 2×2, ktorú vieme vyplniť **2** spôsobmi (buď budú kachličky 2×1 dlhšou stranou ležať zvislo, alebo vodorovne).
- Ak je len jedna z nich na kraji, druhá na ňu môže byť buď nalepená (v takom prípade nám na druhom kraji tiež vznikne mriežka 2×2, ktorú vieme, ako sme už ukázali, vyplniť len dvomi spôsobmi), alebo vznikne medzi nimi jednostĺpcová medzera. V tomto prípade vieme zvyšné medzery zaplniť len jedným spôsobom (obe kachličky 2×1 budú dlhšou stranou ležať zvislo). Treba si uvedomiť, že táto situácia sa môže stať na oboch krajoch (z druhej strany „zrkadlovo“), preto tieto možnosti potrebujeme zdvojnásobiť a dostávame $3 \cdot 2 =$ **6** ďalších možností.
- Ak ani jedna z nich nie je na kraji, vznikajú na oboch krajoch jednostĺpcové medzery, ktoré vieme pokryť len **1** spôsobom (kachličky 2×1 dlhšou stranou zvislo).

Ak máme **1 kachličku** 2×2, môže ležať buď na kraji, 1 stĺpec od kraja alebo v strede (na 3. a 4. stĺpci).

- Ak máme kachličku na kraji, vzniká nám mriežka 2×4, ktorú môžeme pokrývať len kachličkami 2×1. Všimnime si, že ak je niektorá kachlička 2×1 položená vodorovne, musí byť priamo pod/nad ňou položená iná rovnako (ak by nebola, postupným skladaním do niektorej zo strán by sme dostali medzeru 1×1, ktorú nevieme zaplniť). Na mriežku 2×4 vieme uložiť vodorovne vedľa seba buď 2 dvojice kachličiek 2×1, jednu dvojicu alebo žiadnu dvojicu.
  - Ak položíme vedľa seba dve dvojice vodorovne položených kachličiek 2×1, zaplníme celú plochu, teda takto dostávame jednu možnosť.

- Ak položíme len jednu dvojicu vodorovne položených kachličiek 2×1, môže sa nachádať buď na ľavom okraji mriežky 2×4, v jej strede, alebo na jej pravom okraji. V každom z týchto troch prípadov vieme zvyšok pokryť zvislo položenými kachličkami 2×1, dostávame takto spolu 3 možnosti.
- Ak nemáme žiadnu dvojicu vodorovne položených kachličiek 2×1, mriežku 2×4 vyplníme len zvislo položenými kachličkami 2×1, čo je jedna možnosť.

Keďže máme kraje dva, počet tu popísaných možností musíme zdvojnásobiť, preto dostávame v tejto možnosti spolu $(1 + 3 + 1) \cdot 2 = \mathbf{10}$ ďalších možností.

- Ak máme kachličku 2×2 len 1 stĺpec od kraja, zostanú nám na mriežke voľné plochy rozmerov 2×1 a 2×3. Prvú plochu vieme zaplniť len jedným spôsobom. Do druhej môžeme buď položiť dvojicu vodorovne položených kachličiek 2×1 (v takom prípade môže na ploche 2×3 ležať táto dvojica buď vľavo, alebo vpravo, pričom zvyšnú medzeru zaplní práve jedna kachlička 2×1, dostávame tak teda 2 možnosti), alebo len zvislo orientované kachličky 2×1 (čo nám dáva ďalšiu jednu možnosť). Keďže jednostĺpcová medzera sa môže vyskytnúť na oboch krajoch, tu popísané možnosti musíme zdvojnásobiť, preto dostávame $(2 + 1) \cdot 2 = \mathbf{6}$ ďalších možností.
- Ak kachlička 2×2 leží v strede, okolo nej vzniknú dve plochy veľkosti 2×2. Každú z nich vieme pokryť dvojicou buď zvislo, alebo vodorovne orientovaných kachličiek 2×1. Obe dvojice môžu byť orientované buď zvislo, alebo vodorovne, alebo prvá zvislo a druhá vodorovne, alebo prvá vodorovne a druhá zvislo. Tu preto dostávame ďalšie **4** možnosti.

Keďže sme prešli všetky možné prípady, ktoré môžu nastať, stačí nám iba spočítať všetky počty možností, ktorých je spolu $1 + 2 + 6 + 1 + 10 + 6 + 4 = \mathbf{30}$.

Ťažké 10:

Koľko trojciferných čísel je rovných 34-násobkom ich ciferných súčtov? A aké to sú?

Výsledok: 4 čísla, konkrétne 102, 204, 306, 408

Riešenie:

Hľadané čísla majú byť 34-násobkami nejakých iných čísel (svojich ciferných súčtov), teda musia byť násobkami 34. Využijeme, že 34 je veľké číslo a má málo trojiciferných násobkov. Ľahko zistíme, že $34 \cdot 30 = 1020$ je už príliš veľa, keďže dostaneme štvorciferné číslo. Zároveň $34 \cdot 2 = 68$ nám dá iba dvojciferný výsledok. To znamená, že trojciferných násobkov 34 je najviac 27 (od 3 do 29). Prejdime postupne všetky tieto násobky a overme, či vyhovujú podmienke úlohy.

$3 \cdot 34 = 102$	$1 + 0 + 2 = 3$
$4 \cdot 34 = 136$	$1 + 3 + 6 = 10$
$5 \cdot 34 = 170$	$1 + 7 + 0 = 8$
$6 \cdot 34 = 204$	$2 + 0 + 4 = 6$
$7 \cdot 34 = 238$	$2 + 3 + 8 = 13$
$8 \cdot 34 = 272$	$2 + 7 + 2 = 11$
$9 \cdot 34 = 306$	$3 + 0 + 6 = 9$
$10 \cdot 34 = 340$	$3 + 4 + 0 = 7$
$11 \cdot 34 = 374$	$3 + 7 + 4 = 14$
$12 \cdot 34 = 408$	$4 + 0 + 8 = 12$
$13 \cdot 34 = 442$	$4 + 4 + 2 = 10$

$14 \cdot 34 = 476$	$4 + 7 + 6 = 17$
$15 \cdot 34 = 510$	$5 + 1 + 0 = 6$
$16 \cdot 34 = 544$	$5 + 4 + 4 = 13$
$17 \cdot 34 = 578$	$5 + 7 + 8 = 20$
$18 \cdot 34 = 612$	$6 + 1 + 2 = 9$
$19 \cdot 34 = 646$	$6 + 4 + 6 = 16$
$20 \cdot 34 = 680$	$6 + 8 + 0 = 14$
$21 \cdot 34 = 714$	$7 + 1 + 4 = 12$
$22 \cdot 34 = 748$	$7 + 4 + 8 = 19$
$23 \cdot 34 = 782$	$7 + 8 + 2 = 17$
$24 \cdot 34 = 816$	$8 + 1 + 6 = 15$
$25 \cdot 34 = 850$	$8 + 5 + 0 = 13$
$26 \cdot 34 = 884$	$8 + 8 + 4 = 20$
$27 \cdot 34 = 918$	$9 + 1 + 8 = 18$
$28 \cdot 34 = 952$	$9 + 5 + 2 = 16$
$29 \cdot 34 = 986$	$9 + 8 + 6 = 23$

Späť k pôvodným číslam sme sa dostali iba pri 3, 6, 9 a 12, čiže riešeniami sú 102, 204, 306 a 408.

Zadania starších ročníkov nájdete na `malynar.strom.sk/mamut`.

autori:	Jana Baranová, Erik Berta, Viktória Brezinová, Jakub Farbula, Martin Albert Gbúr, Jakub Genči, Gabriela Genčiová, Matej Hanus, Matúš Hlaváčik, Miriam Horváthová, Tomáš Kocák, Peter Kovács, Martin Masrna, Matúš Masrna, Michal Masrna, Martin Mihálik, Lujza Milotová, Kristína Mišlanová, Erik Novák, Daniel Onduš, Patrik Paľovčík, Ján Richnavský, Róbert Sabovčík, Žaneta Semanišinová, Timea Szöllősová, Ľubomír Vargovčík, Štefan Vašak
recenzia a úprava:	Jakub Genči, Miriam Horváthová, Martin Mihálik, Ján Richnavský
názov:	**Mamut – 3. 6. 2022**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`malynar.strom.sk/mamut` `https://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/`