Lomihlav

Košice, 29. 11. 2019

Úlohy

Úloha 1:

Peťko si do kancelárie kúpil novú rastlinu. Janka o nej povedala, že je to červená ruža. Timka o nej povedala, že je to ružový muškát. Mirka o nej povedala, že je to červená orchidea. Každá povedala správne buď farbu, alebo druh kvetiny. Akú kvetinu si Peťko kúpil?

Výsledok: červený muškát

Riešenie:

Máme tri vety o druhu a farbe rastliny od dievčat, no hľadáme iba jednu farbu a jeden druh rastliny. To znamená, že dve z dievčat museli povedať správne farbu alebo druh rastliny. V našom prípade to boli Janka a Mirka, ktoré sa ako jediné zhodli, a to vo farbe. To teda znamená, že Peťkova kvetina je červená. Keďže Timka nepovedala správnu farbu, musela povedať správny druh kvetiny, teda muškát. To znamená, že Peťko si kúpil červený muškát.

Úloha 2:

Promotér Spišo každý pracovný deň spí 8 hodín a cez víkendy 10 hodín. Od pondelka do piatku je vždy 5 hodín denne v práci. Každý deň hrá s kamarátmi 6 hodín Minecraft. Na to, aby sa pripravil na pondelňajšiu poradu, potrebuje prečítať 8 kapitol z knižky. Prečítať jednu kapitolu mu trvá 3 hodiny. Koľko hodín voľného času mu ostane tento týždeň?

Výsledok: 17

Riešenie:

Celý týždeň má dokopy 168 hodín ($7 \cdot 24$). Teraz budeme postupne odčítavať všetky jeho aktivity, ktoré počas týždňa vykoná. Spišo za týždeň spí dokopy 60 hodín ($5 \cdot 8 + 2 \cdot 10$), v práci je 25 hodín ($5 \cdot 5$) a Minecraft hrá 42 hodín ($6 \cdot 7$). Prečítať knižku mu dokopy zaberie 24 hodín (3 hodiny na každú kapitolu). Teraz to už iba odčítame: $168 - 60 - 25 - 42 - 24 = 17$. V týždni mu teda ostane 17 hodín voľného času.

Úloha 3:

Večierku sa zúčastnili zamestnanci dvoch firiem KER a STROM. Na začiatku si každý zúčastnený podal ruku so všetkými ľuďmi z druhej firmy. Koľko ľudí bolo na večierku z firmy KER, ak podaní bolo dokopy 12, na večierku bol párny počet hostí a viac ľudí prišlo z firmy KER?

Výsledok: 6

Riešenie:

Počet podania rúk sa dá vypočítať ako súčin ľudí zo STROMu a KERu (každý zo STROMu si podal ruku s každým z KERu). 12 vieme dostať ako súčin 1 a 12, 2 a 6 alebo 3 a 4. Na večierku bol párny počet zamestnancov a tým nám vypadnú možnosti 1 a 12 ($1 + 12 = 13$) a 3 a 4 ($3 + 4 = 7$). Ostane nám možnosť 2×6, a keďže zamestnancov KERu bolo viac tak ich muselo byť 6.

Úloha 4:

Každý zamestnanec firmy má vlastné šesťciferné identifikačné číslo. Vrátnika zaujímalo, aké sú posledné dve cifry súčinu všetkých identifikačných čísel zamestnancov od 123456 po 123465 (vrátane), ktorých akurát videl sa flákať pri automatoch.

Výsledok: 00

Riešenie:

Číslo 123465 je deliteľné 5. Ak toto číslo vynásobíme párnym číslom (napríklad 123456) dostaneme číslo deliteľné 10. Číslo 123460 je samo o sebe deliteľné 10. Keď vynásobíme dve čísla, ktoré sú deliteľné 10, dostaneme číslo deliteľné 100. Vynásobením zatiaľ 3 spomedzi všetkých identifikačných čísel sme dostali číslo deliteľné 100. Ak toto číslo vynásobíme postupne všetkými zvyšnými identifikačnými číslami, dostaneme opäť číslo deliteľné 100. O takýchto číslach vieme, že majú na konci dvojčíslie 00.

Úloha 5:

Dvere na chodbe vo firme KER sú očíslované kladnými celými číslami. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel, pre ktoré platí, že súčet ich súčinu a väčšieho z ich podielov sa rovná 10.

Výsledok: 3 a 3, 2 a 4, 1 a 5

Riešenie:

Ak je súčet dvoch čísel rovný 10, tieto súčty môžu byť v tvare $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$ alebo $5 + 5$. Súčin dvoch kladných celých čísel nie je nikdy menší ako ich (ľubovoľný) podiel, teda väčšie číslo bude súčin a menšie podiel. Pozrime sa na to, akým súčinom vieme dostať väčšie číslo z každej dvojice a následne overme, či súčet väčšieho podielu a súčinu je 10.

Číslo 9 je súčinom čísel 9 a 1 alebo 3 a 3. Podiel čísel 9 a 1 je 9, čiže súčet je $9+9 = 18$, čo nevyhovuje. Podiel čísel 3 a 3 je 1, teda súčet je $9 + 1 = 10$.

Číslo 8 je súčinom čísel 1 a 8 alebo 4 a 2. Podiel čísel 8 a 1 je 8, čiže súčet je $8 + 8 = 16$. Podiel čísel 4 a 2 je 2 a daný súčet je $8 + 2 = 10$.

Číslo 7 môže byť súčinom len čísel 7 a 1, lenže podiel týchto dvoch čísel je 7, teda súčet je $7+7 = 14$.

Číslo 6 je súčinom čísel 6 a 1 alebo 3 a 2. Podiel 6 a 1 je 6, tým pádom súčet je $6 + 6 = 12$. Podiel čísel 3 a 2 nie je nikdy celé číslo, teda tento prípad nevyhovuje.

Číslo 5 vieme dostať len ako súčin 5 a 1, a ich podiel je tiež 5, a teda ich súčet je $5 + 5 = 10$.

To znamená, že naše hľadané dvojice sú čísla 3 a 3, 2 a 4, 1 a 5.

Úloha 6:

Desať zamestnancov firmy KER hádzalo šípky na terč počas obednej prestávky. Po treťom kole zistili, že najvyšší z nich má 85 bodov, druhý najvyšší o 20 bodov menej. Tretí najvyšší má aritmetický priemer bodov dvoch vyšších kolegov, štvrtý najvyšší má aritmetický priemer troch vyšších kolegov, a tak ďalej. Koľko bodov získal najnižší hráč a koľko získali všetci dohromady?

Výsledok: 75, 750

Riešenie:

Počet bodov najvyššieho zamestnanca je 85, druhého o 20 menej, čiže 65. Tretí najvyšší zamestnanec získal $(85 + 65)/2 = 75$ bodov. Súčet bodov najvyšších dvoch je rovný dvojnásobku ich priemeru $(85 + 65 = 2 \cdot 75)$. Označme si 75 (počet bodov tretieho) p, súčet bodov dvoch najvyšších zamestnancov je $2p$. Štvrtý najvyšší zamestnanec získal počet bodov rovný $(2p + p)/3= p$, piaty najvyšší zamestnanec získal $(2p + p + p)/4 = p$ bodov. Vidíme, že každý ďalší zamestnanec získal $p = 75$ bodov. Súčet bodov dvoch najvyšších je $2p$, zvyšných osem zamestnancov získalo po p bodov, čo je spolu $8p$. Najnižší (desiaty) zamestnanec získal rovnako veľa bodov ako všetci jeho kolegovia (okrem dvoch najvyšších), čiže 75. Všetkých 10 zamestnancov získalo dokopy $75 \cdot 10 = 750$ bodov.

Úloha 7:

Dano počas prestávky v práci rád hrá kocky. Raz si 12 kockami hodil v súčte číslo, ktoré má všetky cifry rovnaké. Ak by hodil číslo o jedna menšie, bolo by toto číslo deliteľné prvočíslom p. Ak by hodil číslo o dva menšie, tak by bolo deliteľné prvočíslom $p - 2$. Aké číslo hodil Dano?

Výsledok: 22

Riešenie:

Na dvanástich kockách sa dá hodiť iba súčet od 12 do 72, teda čísla s rovnakými ciframi, ktoré mohol Dano hodiť, sú 22, 33, 44, 55 a 66. Prejdime si všetky možnosti:

- Ak by hodil číslo 66, tak číslo $66 - 2 = 64$ by muselo byť deliteľné prvočíslom $p - 2$, pričom p je prvočíslo. 64 je však deliteľné jediným prvočíslom a to 2. V takomto prípade by prvočíslo p muselo byť 4, čo nie je prvočíslo, teda Dano 66 nehodil.
- Ak by hodil 55, tak číslo $55 - 2 = 53$ by muselo byť deliteľné prvočíslom $p - 2$, pričom p je prvočíslo. 53 je ale samo prvočíslo, teda jediné prvočíslo, ktorým je deliteľné, je 53. V takomto prípade by prvočíslo p muselo byť 55, čo tiež nie je prvočíslo, teda Dano nehodil ani 55.
- Ak by hodil 44, tak číslo $44 - 1 = 43$ by muselo byť deliteľné prvočíslom p, pričom $p - 2$ je prvočíslo. 43 je ale samo prvočíslo, teda jediné prvočíslo ktorým je deliteľné je 43. Zároveň by číslo $44 - 2 = 42$ malo byť deliteľné prvočíslom $p - 2 = 43 - 2 = 41$. 42 určite nie je deliteľné 41, teda Dano nehodil ani 44.
- Ak by hodil 33, tak číslo $33 - 1 = 32$ by muselo byť deliteľné prvočíslom p, pričom $p - 2$ je prvočíslo. 32 je ale deliteľné iba jedným prvočíslom a to 2. To znamená, že prvočíslo $p - 2$ by malo byť $2 - 2 = 0$, čo prvočíslo určite nie je. Dano teda nehodil ani 33.
- Ak by hodil 22, tak by $22 - 1 = 21$ muselo byť deliteľné prvočíslom p, zatiaľ čo $22 - 2 = 20$ by muselo byť deliteľné prvočíslom $p - 2$. Tu to už platí, keďže 21 je deliteľné prvočíslom 7 a 20 je deliteľné prvočíslom $7 - 2 = 5$. Dano teda mohol hodiť číslo 22.

Vidíme, že jediné číslo, ktoré mohlo Danovi padnúť, je 22.

Úloha 8:

Logo firmy je štvoruholník umiestnený do kružnice o polomere 10 tak, že jeden z jeho vrcholov leží v strede kružnice a ostatné vrcholy ležia na kružnici. Strany tohto štvoruholníka sú v pomere $5 : 5 : 6 : 8$. Aký má tento štvoruholník obvod?

Výsledok: 48

Riešenie:

Keďže jeden z vrcholov štvoruholníka leží v strede kružnice a zvyšné vrcholy ležia na jej obvode, obe strany, ktoré zo stredu vychádzajú, majú dĺžku polomeru kružnice, čiže 10. V pomere strán vidíme iba dve strany s rovnakou dĺžkou, a teda to budú práve tieto dve. Na pomer sa môžeme pozrieť ako na počet dielikov, ktoré majú jednotlivé strany. Máme teda 2 strany po 5 dielikov, jednu so 6 a jednu s 8 dielikmi. Vieme, že strany, ktoré majú 5 dielikov, merajú 10. Z toho vyplýva, že jeden dielik má dĺžku 2. Celý štvoruholník dokopy má $5 + 5 + 6 + 8 = 24$ dielikov. A teda celý obvod je 48.

Úloha 9:

Skladník Dano má v sklade 8 rebríkov označených číslami 1 až 8. Sú opreté o stenu v rade vedľa seba v nejakom poradí a on ich chce uložiť tak, aby boli zľava doprava v poradí 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Prekladá rebríky tak, že jeden vytiahne a umiestni ho buď medzi dva rebríky, alebo na niektorý kraj. Koľko najmenej presunutí stačí Danovi na to, aby uložil rebríky do správneho poradia, nech boli predtým poukladané akokoľvek?

Výsledok: 7

Riešenie:

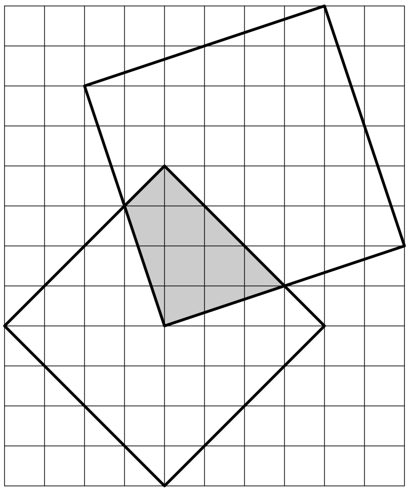
Aby sme dokázali, že hľadané minimum je sedem, potrebujeme dokázať dve veci. Jednak, že menej presunov (aspoň niekedy) nestačí, jednak, že sedem vždy stačí.

V prvej časti predpokladajme, že Dano má na začiatku rebríky v presne opačnom poradí, než ich chce mať na konci – teda, ak čítame poradie zľava doprava, najviac vľavo je rebrík 8, potom 7 a tak ďalej, až na pravom konci je 1. To znamená, že na začiatku je každá dvojica rebríkov v opačnom poradí oproti tomu, v ktorom má skončiť (na konci má byť z každých dvoch rebríkov ten s nižším číslom viac vľavo, teraz je vždy vľavo ten s vyšším číslom). Preto sa musia Danove kroky dotknúť každej jednej dvojice, čiže z každej dvojice rebríkov musí manipulovať aspoň jedným. Keby si však dovolil iba šesť alebo menej presunov, nutne by hýbal nanajvýš šiestimi rebríkmi, takže by nechal aspoň dva nedotknuté. To však znamená, že ktorékoľvek dva z týchto by ostali v nevyhovujúcom vzájomnom poradí. Preto celkové poradie by tiež určite nevyhovovalo.

V druhej časti majme dané ľubovoľné počiatočné usporiadanie rebríkov. Dano nechá rebrík číslo 1 tam, kde sa pôvodne nachádzal. Potom vezme rebrík 2 a umiestni ho medzi 1 a čokoľvek, čo stojí vedľa neho. Takto postupne prejde všetky rebríky podľa čísla vzostupne a každý umiestni priamo na pozíciu, na ktorej má skončiť (čo je napravo od doteraz umiestnených rebríkov). Môžu existovať iné rovnako dobré prístupy, pre niektoré zoradenia rebríkov dokonca aj postupy využívajúce menej než sedem pohybov, ale tento funguje vždy, čím dokazuje, že sedem presunutí Danovi stačiť musí.

Úloha 10:

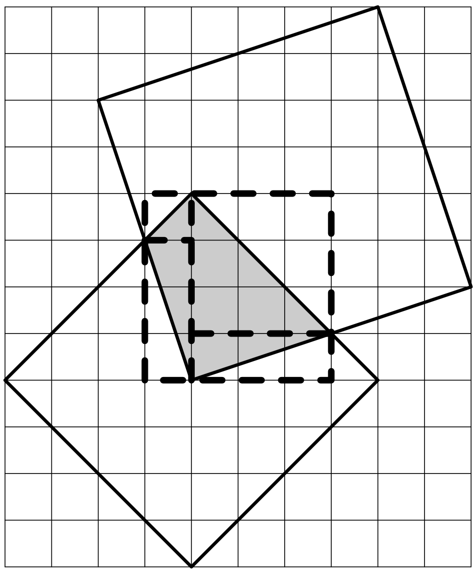
Vo firme sú zvláštne umiestnené 2 kancelárie v tvare štvorca, ktoré majú spoločný priestor. Zisti obsah ich spoločnej časti.



Výsledok: 8

Riešenie:

Najjednoduchší spôsob ako vypočítať obsah spoločnej plochy štvorcov je, že si danú plochu rozdelíme na pravouhlé trojuholníky. V tomto prípade ich máme 4. Prepona každého trojuholníka je zároveň uhlopriečka obdĺžnika. Tieto obdĺžniky majú obsahy 1, 9, 3 a 3. Keďže vieme, že uhlopriečky delia obdĺžniky na polovicu, tak vypočítaním obsahov daných obdĺžnikov a vydelením 2 dostaneme obsahy trojuholníkov ktorých súčet je obsah spoločnej plochy kancelárií, teda 8.



Úloha 11:

Pre každé výrobné číslo ergonomického rebríka platí, že počnúc jeho treťou číslicou zľava, je každá jeho číslica súčtom všetkých číslic, ležiacich naľavo od nej. Koľko je všetkých takýchto štvorciferných čísel?

Výsledok: 10

Riešenie:

Cifry si označíme postupne a, b, c, d. Podľa zadania platí, že $c = a + b$ a zároveň $d = a + b + c$. Dosadením prvej rovnice dostaneme $(a + b) + c = c + c = 2c = d$. Keďže pracujeme s ciframi tak vieme, že $2c = d \leq 9$. Taktiež vieme, že každé číslo po vynásobení 2 je párne. Z toho vyplýva, že d môže byť 8, 6, 4 a 2 (d nemôže byť rovné 0, keďže a nemôže byť rovné 0), a teda c môže byť 4, 3, 2 a 1.

Ak $c = 4$, máme 4 možnosti, ako by štvorciferné číslo mohlo vyzerať (1348, 3148, 4048, 2248).

Ak $c = 3$, máme 3 možnosti, ako by štvorciferné číslo mohlo vyzerať (1236, 2136, 3036).

Ak $c = 2$, máme 2 možnosti, ako by štvorciferné číslo mohlo vyzerať (1124, 2024).

Ak $c = 1$, máme 1 možnosť, ako by štvorciferné číslo mohlo vyzerať (1012).

Teda našich štvorciferných čísel je 10.

Úloha 12:

Dĺžka ergonomického rebríka je trojciferné číslo, v ktorom sa každé dve susedné cifry líšia o 3. Koľko rôznych dĺžok ergonomických rebríkov existuje?

Výsledok: 20

Riešenie:

Pozrime sa na strednú cifru takejto dĺžky a rozoberme si všetky možnosti:

- Ak je stredná cifra 0, 1, alebo 2, tak krajné cifry budú určite o 3 väčšie, pretože cifry nemôžu byť záporné. Dostaneme čísla $303, 414, 525$.
- Ak je stredná cifra 3, tak prvá cifra musí byť 6. Na mieste stoviek totiž nemôže byť 0, pretože by číslo nebolo trojciferné. Pre poslednú cifru existujú obe možnosti – 0 alebo 6. Dostaneme teda 2 dĺžky: $630, 636$.
- Ak je stredná cifra 4, 5 alebo 6, tak môžeme dosadiť dve rôzne cifry aj na miesto jednotiek, aj na misto stoviek, teda štyri možnosti pre každú voľbu strednej cifry. Máme 3 možnosti ako zvoliť strednú cifru, čiže dokopy je možností 12.
- Ak je stredná cifra 7, 8 alebo 9, tak krajné cifry musia byť o 3 menšie a teda tu je iba jedna možnosť na každú cifru. Dostaneme preto dokopy len 3 rôzne možnosti na dĺžku rebríka.

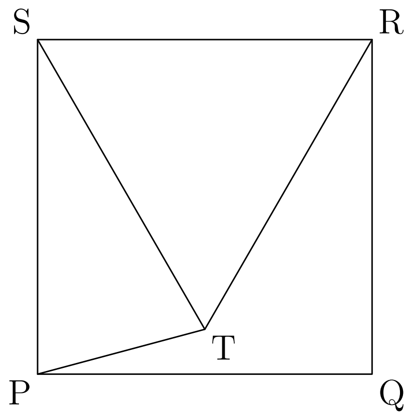
Takto sme rozobrali všetky možnosti dĺžok rebríka, ktorých je spolu 20 $(3 + 2 + 12 + 3)$.

Úloha 13:

Na stole je poznámkový blok v tvare štvorca $PQRS$ so stranou 10 cm. Bod T sa nachádza vo vnútri štvorca a platí, že veľkosť uhla SPT je 75 stupňov a veľkosť uhla TSP je 30 stupňov. Aká je dĺžka TR?

Výsledok: 10 cm

Riešenie:



Keďže uhly SPT a TSP majú spolu 105°, tak veľkosť uhla PTS je 75°, lebo súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180°. Z tohto vieme, že trojuholník SPT je rovnoramenný, lebo ma rovnaké uhly pri vrcholoch P a T, z čoho plynie, že strany PS a TS sú rovnako dlhé. Trojuholník TSR je tiež rovnoramenný, keďže obe strany TS a RS majú 10 cm.

Keďže uhol PSR je pravý a uhol TSP má 30°, tak uhol TSR má 60°. Uhly STR a SRT sú rovnaké, keďže trojuholník TSR je rovnoramenný, a teda majú tiež 60°. Z toho vyplýva, že trojuholník TSR je rovnostranný, lebo má všetky uhly rovnaké. Strana SR je strana štvorca, ktorá má 10 cm, rovnako dlhá je preto aj strana TR.

Úloha 14:

Zamestnanci z oddelenia predaja sa vybrali na túru a zabalili si jedlo na 10 dní. Po dvoch dňoch sa však sekretárka Kristín a asistentka predaja Janka zranili a nemohli ďalej pokračovať. Zvyšným potom zostalo jedlo ešte na ďalších 12 dní. Koľko zamestnancov došlo do cieľa, ak vieme, že každý zamestnanec zje rovnako veľa?

Výsledok: 4

Riešenie:

Po dvoch dňoch túry, predtým ako sa stratili Kristín a Janka, zostalo každému zamestnancovi jedlo na 8 dní. Keďže každý zje rovnako veľa a Kristín aj Janka mali jedlo ešte na 8 dní pre seba, tak dokopy ostatným nechali jedlo na 16 dní pre jedného človeka. Toto ich jedlo ostatní zjedli za 4 dni, keďže vlastné jedlo mali ešte na $10 - 2 = 8$ dní, ale spolu im vydržalo až 12 dní. Preto zvyšných zamestnancov bolo $16/4 = 4$ (jedlo na 16 dní pre jedného človeka vydrží 4 ľuďom 4 dni).

Úloha 15:

Do počítača v kancelárii manažéra Peťa vložíme kladné celé číslo. Ak je párne, počítač ho vydelí dvomi, ak je nepárne, počítač ho vynásobí tromi a pripočíta 1. Ak je výsledok 1, počítač sa zastaví, inak celý postup zopakuje. Ktoré čísla sme mohli vložiť do počítača, ak sa zastavil presne po deviatich krokoch?

Výsledok: 12, 13, 80, 84, 85, 512

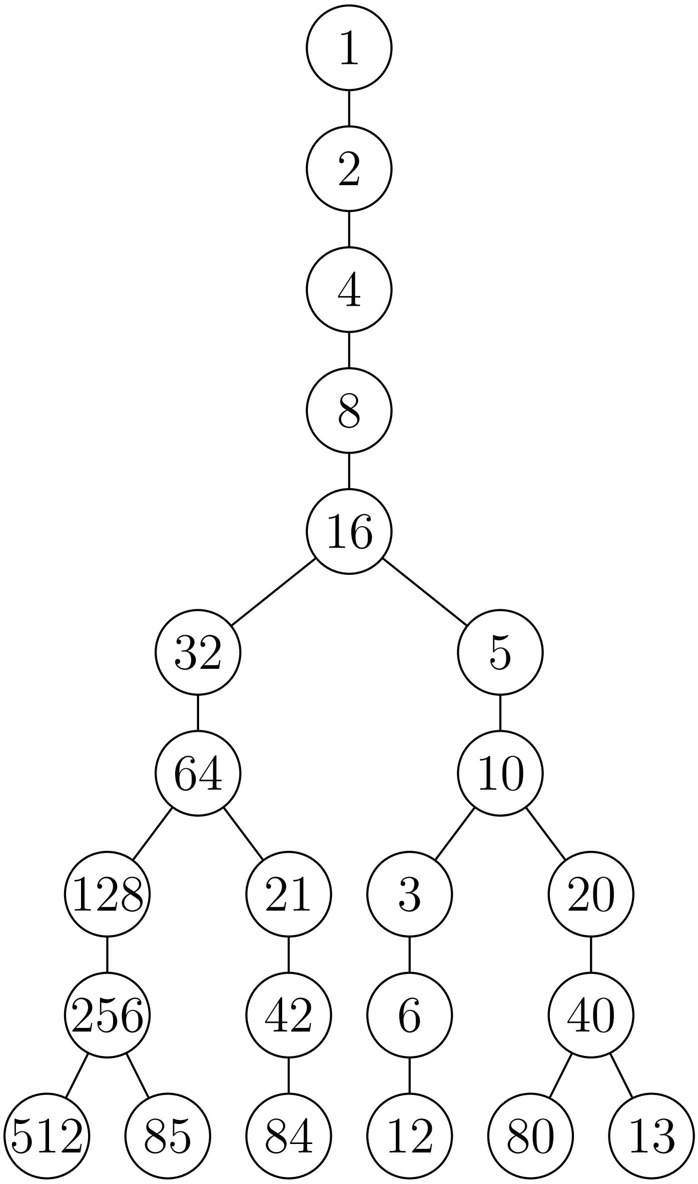
Riešenie:

Túto úlohu budeme riešiť odzadu. Keďže počítač buď delí dvoma, alebo násobí troma a pripočítava 1, my budeme robiť opačný postup, a teda budeme násobiť dvoma alebo odpočítavať 1 a deliť troma.

Vieme, že na konci máme v počítači číslo 1. Pred týmto číslom teda mohli byť čísla 2 (po vynásobení dvoma) alebo 0 (po odčítaní 1 a vydelení troma). 0 je však párne číslo, čo znamená, že počítač by ho vydelil dvoma, a tak by donekonečna písal samé 0, ale 1 by nenapísal nikdy. Preto pred číslom 1 mohlo byť iba číslo 2. Pred číslom 2 mohlo byť iba číslo 4 (po vynásobení dvoma), pretože ak od 2 odčítame 1, dostaneme 1 a to nie je deliteľné troma.

Pred 4 mohlo byť 8 alebo 1, ale pri 1 by sa počítač zastavil, takže po 1 by 4 ani nemohla nasledovať. Kvôli tomu pred 4 mohlo byť iba číslo 8. Zatiaľ sme zistili, že odzadu v počítači mohli byť iba čísla 1, 2, 4, 8, čím sme spravili 3 kroky späť.

Takto postupujeme ďalej, kým nespravíme ďalších 6 krokov. Musíme si dávať pozor na to, že deliť troma môžeme len vtedy, ak po vydelení dostaneme nepárne kladné celé číslo väčšie ako 1 (ak by sme dostali párne, tak počítač by to číslo vydelil dvoma), násobiť dvoma môžeme vždy. Preto pre každé číslo dostaneme 1 alebo 2 možnosti, čo mohlo byť pred ním. Celý postup môžeme zakresliť ako na obrázku.



Spätne sme teda zistili, že ak sa počítač zastavil po deviatich krokoch, tak do počítača sme mohli vložiť týchto 6 čísel: 12, 13, 80, 84, 85 a 512.

Úloha 16:

Peťo si nepamätá kód od trezoru, ale vie, že je to štvorciferné číslo s ciferným súčinom 210. Koľko existuje takých kódov?

Výsledok: 48

Riešenie:

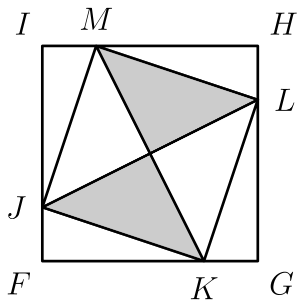
Ciferný súčin 210 rozložíme na prvočísla: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Preto kód mohol obsahovať cifry 2, 3, 5 a 7. Rozoberme najprv možnosť, že kód obsahoval práve tieto 4 cifry. Dostaneme dokopy $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ rôznych možných kódov (4 možnosti pre prvú cifru kódu, pre každú z týchto možností 3 možnosti pre druhú cifru, 2 možnosti pre tretiu cifru a 1 možnosť pre poslednú cifru).

To ale ešte nie sú všetky možnosti, pretože prvočísla 2, 3, 5, 7 ešte môžeme násobiť medzi sebou. Musíme to robiť tak, aby tento súčin bol jednociferný, keďže my hľadáme cifry kódu. Jediná takáto dvojica je 2 a 3. Súčin všetkých ostatných dvojíc by už bol dvojciferný. Nemusíme skúšať ani trojice a štvorice, pretože vieme, že ich súčiny by boli viacciferné.

Teraz zoberieme cifru 6 (ako súčin $2 \cdot 3$) a cifry 5 a 7. Súčin týchto troch cifier je 210, ale 210 má byť súčin štyroch cifier. Preto ešte pridáme cifru 1, pretože tá ciferný súčin nezmení. Máme teda cifry 1, 5, 6, 7, z čoho dostávame ďalších 24 možností. Dokopy tak dostávame $24 + 24 = 48$ rôznych kódov.

Úloha 17:

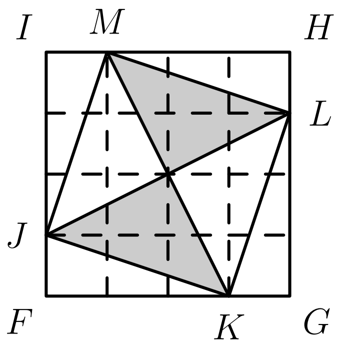
Grafik Jano navrhol nové logo firmy tvaru štvorca $FGHI$, ktorý má obsah 80. Body J, K, L, M ležia na stranách štvorca tak, že $|FK| = |GL| = |HM| = |IJ|$ a $|FK| = 3|KG|$. Aký je obsah sivej plochy?



Výsledok: 25

Riešenie:

Stranu štvorca si rozdelíme na 4 rovnaké dieliky. Potom štvorec má obsah 16 políčok, pričom jedno políčko má obsah $80 : 16 = 5$. Potom každý z trojuholníkov FKJ, GLK, HML, IJM má obsah $(1 \cdot 3) : 2$ políčok. Dokopy majú tieto trojuholníky obsah $4 \cdot (1 \cdot 3) : 2 = 6$ políčok, čo je $6 \cdot 5 = 30$. Potom štvorec $JKLM$ má obsah $80 - 30 = 50$. Sivá plocha je polovica obsahu tohto štvorca, čiže jej obsah je 25.



Úloha 18:

O 10 rokov bude súčin vekov asistenky predaja Janky a sekretárky Kristín o 400 väčší ako je teraz. Aký je momentálne súčet ich vekov?

Výsledok: 30

Riešenie:

Veky Janky a Kristín si postupne označíme ako J a K. Súčin ich vekov o 10 rokov si teda vyjadríme ako $(J+10)\cdot(K+10)$. Vieme, že ten bude od pôvodneho súčinu väčší o 400. Môžeme si teda vytvoriť rovnicu:

$$\begin{aligned}
J \cdot K + 400 &= (J + 10) \cdot (K + 10) \\
J \cdot K + 400 &= J \cdot K + 10 \cdot J + 10 \cdot K + 100 && / - (J \cdot K) \\
400 &= 10 \cdot J + 10 \cdot K + 100 && / - 100 \\
300 &= 10 \cdot J + 10 \cdot K && / : 10 \\
30 &= J + K
\end{aligned}$$

Z rovnice nám po úpravách vyšlo, že súčet vekov Janky a Kristín je 30.

Úloha 19:

Peťo sa v práci nudil a napísal si na papier svoje obľúbené dvojciferné číslo. Potom napísal toto číslo s prehodenými ciframi. Tieto dve čísla vynásobil a dostal 1300. Aký je súčet týchto čísel?

Výsledok: 77

Riešenie:

Najprv si musíme urobiť prvočíselný rozklad čísla 1300, aby sme vedeli, z ktorých prvočísel budú zložené dané dvojciferné čísla: $1300 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$. Povedzme, že by Peťovo obľúbene číslo bolo 13. V takom prípade by druhé dvojciferné číslo muselo byť poskladané zo zvyšných prvočísel, teda $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$, čo nie je ani 31 (číslo 13 s prehodenými ciframi), ani dvojciferné číslo.

Jeho obľúbené číslo teda musí byť zložené, keďže najväčšie prvočíslo z rozkladu čísla 1300 nevyhovuje. Buď pôvodné alebo číslo s prehodenými ciframi musí byť deliteľné 13, preto skúsime 13 vynásobiť ostatnými prvočíslami. Rozoberieme všetky možnosti.

Ak je prvé číslo $13 \cdot 2 = 26$, tak druhé číslo musí byť $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$, ale ak prehodím cifry, nedostanem číslo 26.

Ak je prvé číslo $13 \cdot 2 \cdot 2 = 52$, tak druhé číslo musí byť $5 \cdot 5 = 25$, čo je číslo 52 s prehodenými ciframi. Ich súčet je $25 + 52 = 77$. Číslo 52 už nemôžeme násobiť ďalšími prvočíslami, lebo by sme nedostali dvojciferné číslo.

Ak je prvé číslo $13 \cdot 5 = 65$, tak druhé číslo musí byť $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$, ale ak prehodím cifry nedostanem číslo 65. Číslo 65 už taktiež ďalej násobiť nemôžeme.

Ďalšie čísla už nemusíme skúšať, pretože by nám ako Peťovo číslo vyšlo trojciferné číslo. Súčet daných čísel je teda $25 + 52 = 77$.

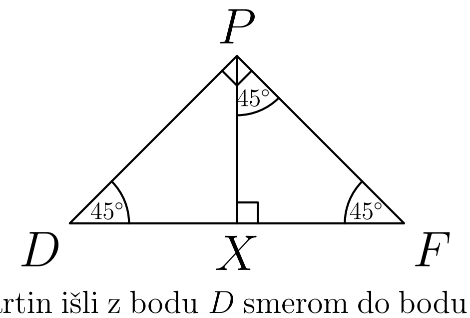
Úloha 20:

Keď sa účtovník Michal z domu pozrel na firmu, videl poštu naľavo pod uhlom 45 stupňov. Na mape zistil, že pošta je od jeho domu vzdialená rovnako, ako od firmy. Ráno vyrazili Michal a jeho brat Martin z ich domu priamo do firmy, ale v polovici cesty sa Michal odpojil a išiel priamo na poštu. Aký je rozdiel vzdialeností, ktoré prešli Michal a Martin, ak vieme, že Martin prešiel 10 kilometrov?

Výsledok: 0

Riešenie:

Keď sa Michal pozrel z domu (označme ho ako bod D) na firmu (označme ju ako bod F), videl poštu (označme ju ako bod P) naľavo pod uhlom 45°. To znamená, že body D, P a F tvoria trojuholník a zároveň vieme, že $|\angle PDF| = 45°$. Ďalej zo zadania vieme, že pošta je od jeho domu vzdialená rovnako ako od firmy, teda $|PD| = |PF|$. Preto trojuholník DFP je rovnoramenný so základňou DF, a teda $|\angle PFD| = |\angle PDF| = 45°$.



Poďme sa teraz pozrieť na to, akou cestou bratia išli. Michal aj Martin išli z bodu D smerom do bodu F, ale Michal sa v polovici cesty odpojil (označme ako bod X miesto, kde sa odpojil) a pokračoval na poštu. Michal teda prešiel dĺžku $|DX| + |XP|$ a Martin dĺžku $|DX| + |XF|$. Nás zaujíma rozdiel dĺžok ich ciest, teda rozdiel $|XP|$ a $|XF|$ (keďže cestu $|DX|$ mali spoločnú).

Vieme, že bod X leží v strede základne DF rovnoramenného trojuholníka DFP, preto XP je kolmé na DF (nakoľko v rovnoramennom trojuholníku je ťažnica zhodná s výškou, čo vieme dokázať cez zhodnosť trojuholníkov DXP a FXP). Pozrime sa na trojuholník XFP. Poznáme v ňom už dva uhly, $|\angle PXF| = 90°$ a $|\angle PFX| = 45°$, tretí vieme dopočítať ako $|\angle FPX| = 180° - 90° - 45° = 45°$. Keďže $|\angle PFX| = |\angle FPX| = 45°$, tak trojuholník XFP je rovnoramenný so základňou PF, a teda $|PX| = |FX|$. Dĺžky ciest, ktoré prešli Michal a Martin, sú preto rovnaké, čiže ich rozdiel ich je 0.

Úloha 21:

V kuchynke na stole je položená kocka cukru s hranou 16 cm. Na nej je zvrchu položená druhá, menšia kocka tak, že nepretŕča cez žiadnu hranu väčšej kocky. Zistite, akú dlhú hranu má menšia kocka, ak vieme, že nezakrytý povrch oboch kociek je rovnako veľký ako povrch väčšej kocky.

Spodná stena väčšej kocky je zakrytá stolom.

Výsledok: 8

Riešenie:

Pozrime sa najprv na nezakryté časti oboch kociek a následne ich porovnajme s väčšou kockou.

Ak na väčšiu kocku položíme menšiu kocku, tak nezakryté časti väčšej kocky sú 4 bočné steny a časť hornej steny, ktorá nie je zakrytá malou kockou. Spodná stena je zakrytá stolom. Dokopy teda do nezakrytého povrchu započítame 5 stien väčšej kocky bez jednej steny menšej kocky.

Nezakryté časti menšej kocky sú všetky 4 bočné steny a horná stena. V tomto prípade je spodná stena zakrytá väčšou kockou. Dokopy teda do nezakrytého povrchu započítame 5 stien menšej kocky.

Nezakrytý povrch oboch kociek dokopy je teda súčtom obsahov piatich stien väčšej kocky a štyroch stien menšej kocky (pri väčšej kocke potrebujeme jednu stenu menšej kocky odčítať).

Aby sa rovnal povrch väčšej kocky (6 stien) s nezakrytým povrchom oboch kociek (5 stien väčšej kocky a 4 steny menšej kocky), musel by byť súčet obsahov 4 stien menšej kocky rovný obsahu 1 steny väčšej kocky. To znamená, že obsah 1 steny väčšej kocky je 4-krát väčší ako obsah 1 steny menšej kocky. Oba z týchto druhov stien sú štvorce a obsah štvorca zväčšíme 4-krát tak, že každú z jeho strán zväčšíme 2-krát, keďže $2 \cdot 2 = 4$. Hrana menšej kocky je teda $2\times$ kratšia ako hrana väčšej kocky, čo je 8 cm.

Môžeme si ešte urobiť skúšku správnosti. Povrch väčšej kocky je $6 \cdot 16 \cdot 16 = 1536\,\text{cm}^2$. Povrch nezakrytej časti väčšej kocky, čiže obsah 5 jej stien bez časti hornej steny je $5 \cdot 16 \cdot 16 - 8 \cdot 8 = 1216\,\text{cm}^2$ a povrch nezakrytej časti malej kocky je $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320\,\text{cm}^2$, čiže celkový povrch nezakrytých častí je $1216 + 320 = 1536\,\text{cm}^2$, čo je rovnako ako povrch väčšej kocky.

Úloha 22:

Asistentke predaja Janke sa nepáčila cena jedného z rebríkov, tak sa rozhodla urobiť zľavu a v cene zmazala poslednú cifru. Dostala číslo jedenásťkrát menšie ako pôvodné. Aká najväčšia mohla byť pôvodná cena rebríka?

Výsledok: 99

Riešenie:

Pozrime sa na tento príklad odzadu. Chceme zistiť, pre ktoré čísla platí, že keď ich vynásobíme číslom 11, tak sa im na koniec pripíše ďalšia cifra, ale inak sa číslo nezmení. Ak vynásobíme akékoľvek číslo číslom 10, dostaneme číslo, ktorému len na koniec pripíšeme 0. Ak však násobíme číslom 11, je to akoby sme číslo vynásobili desiatimi a potom ho k výsledku ešte raz prirátali. Aby sa zmenila len cifra na mieste jednotiek a žiadna iná, môžeme k 10-násobku prirátať iba jednociferné číslo, a teda najviac 9. Najväčšie číslo také, aby sa pri vynásobení číslom 11 len pripísala cifra na jeho koniec, je 9 a $9 \cdot 11 = 99$, čiže najväčšia pôvodná cena mohla byť 99.

Úloha 23:

Budova firmy má 100 špinavých okien v rade. Umývač Matúš umýval okná nasledovne: Prvé okno umyl. Druhé okno nechal tak, ale každé o dve ďalej umyl. Tretie taktiež nechal tak, ale každé o tri ďalej umyl. Takto pokračoval až po sté okno. Ktoré v poradí je desiate neumyté okno?

Výsledok: 29

Riešenie:

Môžeme si všimnúť, že Matúš umýval okná, ktorých poradové číslo je násobkom nejakého menšieho čísla (väčšieho ako 1). Neumyl teda okná, ktoré nie sú násobkom žiadneho čísla okrem 1 a seba samého, čiže okná, ktorých poradové čísla sú prvočísla. Hľadáme teda 10. prvočíslo. Prvých 10 prvočísel je 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, čiže 10. okno, ktoré neumyl, je 29. v poradí.

Úloha 24:

Spokojný zákazník Tino sa už veľmi teší na Vianoce, takže si už kúpil adventný kalendár (adventný kalendár má 24 okienok). V každom okienku môže nájsť jednu čokoládku alebo jednu salónku, v niektorých okienkach aj obe naraz. Tino bol však príliš pažravý, takže celý kalendár už stihol zjesť. Zistil pri tom:

- Okienok, v ktorých bola iba čokoládka, bolo dvakrát viac ako okienok, v ktorých bola iba salónka,
- Trojnásobok počtu okienok so salónkou je rovný dvojnásobku počtu okienok s čokoládkou.

Koľko čokoládiek z kalendára zjedol Tino?

Výsledok: 18

Riešenie:

Adventný kalendár si môžeme rozdeliť na 3 časti, a to na okienka iba s čokoládami, okienka iba so salónkami a okienka kde sa nachádzajú aj salónky aj čokolády zároveň. Počty okienok si môžeme označiť ako c (iba čokolády), s (iba salónky) a o (obe). Potom si podľa zadania vieme vytvoriť 3 rovnice o troch neznámych.

$$\begin{aligned} 24 &= c + s + o && \text{Dokopy je v adventnom kalendári 24 okienok.} \\ c &= 2s && \text{1. podmienka zo zadania.} \\ 3s + 3o &= 2c + 2o && \text{2. podmienka zo zadania.} \end{aligned}$$

Prvá z rovníc vznikla tak, že sme spočítali všetky okienka vo všetkých druhoch okienok $(c + s + o)$ a tak získali číslo 24, čo je počet políčok v adventnom kalendári. Druhá rovnica hovorí, že okienok, v ktorých bola iba čokoláda, je dvakrát viac ako okienok, kde sú iba salónky, teda $c = 2s$. V tretej rovnici sme na jednej strane napísali počet okienok, kde sú iba salónky, a počet okienok, kde sú aj salónky aj čokolády naraz. Toto vyjadruje všetky okienka, kde sú salónky. Rovnako vieme zapísať aj počet okienok s čokoládami. Druhá rovnica nám hovorí, že počet okienok, kde je iba čokoláda (c) môžeme nahradiť $2s$. Dosaďme teda do zvyšných rovníc.

$$\begin{aligned} 24 &= 3s + o \\ 3s + 3o &= 4s + 2o \end{aligned}$$

Z druhej si vyjadrime o. Dostávame $o = s$. Teraz môžeme o dosadiť do prvej z týchto dvoch rovníc a vyjde nám, že

$$24 = 4s,$$

čiže $s = 6$. Z rovnice $o = s$ vyplýva, že o sa tiež rovná 6. A z rovnice $24 = c + s + o$ vyplýva, že $c = 24 - 12 = 12$. Počet všetkých čokolád, ktoré Tino pojedol, spočítame následne jednoducho ako $c + o = 12 + 6 = 18$.

Úloha 25:

Účtovník Michal sa učil pracovať s Excelom. Najprv si vytvoril tabuľku so siedmimi stĺpcami a dvoma riadkami. Do políčok v prvom stĺpci napísal svoje obľúbené čísla. Ostatné stĺpce vyplnil takto: Do políčka v prvom riadku napísal súčet čísel v predchádzajúcom stĺpci a do políčka v druhom riadku napísal rozdiel čísel v predchádzajúcom stĺpci. Aký je súčet čísel v políčkach v prvom stĺpci, ak v poslednom stĺpci sú čísla 96 a 64?

Výsledok: 20

Riešenie:

V prvom stĺpci tabuľky sú nejaké 2 Michalove obľúbené čísla, ktoré si označíme ako A a B. V druhom stĺpci do prvého riadku pripočítame A aj B (súčet čísel v predchádzajúcom stĺpci) a do druhého riadku pripočítame A a odčítame B (rozdiel čísel v predchádzajúcom stĺpci).

Týmto spôsobom popísaným v zadaní si budeme postupne vypĺňať aj ďalšie stĺpce, až nám vznikne nasledovná tabuľka.

A	$A+B$	$2A$	$2A+2B$	$4A$	$4A+4B$	$8A$
B	$A-B$	$2B$	$2A-2B$	$4B$	$4A-4B$	$8B$

Súčet čísel v prvom stĺpci je $A+B$ a súčet čísel v poslednom stĺpci je $8A+8B = 8(A+B)$. Zistili sme teda, že súčet čísel v prvom stĺpci je osemkrát menší ako v poslednom. Keďže v poslednom stĺpci majú byť podľa zadania čísla 96 a 64, tak ich súčet je $96+64 = 160$ a $160 : 8 = 20$. Súčet čísel v prvom stĺpci je 20.

Úloha 26:

V sklade našiel Dano 128 guľôčok. Tri z nich sú označené písmenami A, B, C. Peťo mu povedal, že A je najťažšia, B je druhá najťažšia a C je tretia najťažšia guľôčka (zo všetkých guľôčok v sklade). Koľko najmenej porovnaní (vieme naraz porovnávať len dve guľôčky a výsledkom porovnania je iba informácia, ktorá z guľôčok je ťažšia) Dano potrebuje na to, aby overil, či mu Peťo vraví pravdu?

Výsledok: 127

Riešenie:

Keďže guľôčky A, B a C majú byť v tomto poradí tri najťažšie zo všetkých, tak budeme potrebovať overiť, či sú tieto tri guľôčky správne zoradené, a zároveň to, či je všetkých zvyšných 125 guľôčok ľahších ako C.

Venujme sa najprv druhej časti. Máme 126 guľôčok, z ktorých jedna je označená ako C, a chceme overiť, že práve táto je najťažšia zo všetkých. To zodpovedá úlohe, v ktorej chceme medzi 126 guľôčkami nájsť tú najťažšiu a „pozrieť sa“, či ide o C (ak by sme medzičasom našli ťažšiu guľôčku než C, môžeme, samozrejme, skončiť, ale, ak Peťo vravel pravdu, tak sa to nestane). Takže potrebujeme zistiť, na koľko najmenej vážení vieme nájsť najťažšiu guľôčku. Pri jednom ľubovoľnom porovnaní dvoch guľôčok vieme vyradiť ľahšiu z nich, pretože tá určite nebude najťažšia. Tá ťažšia z nich ňou stále môže byť, kým máme ešte nejaké nevyradené guľôčky, s ktorými sme ju neporovnali.

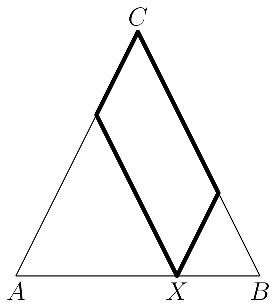
Keďže na to, aby sme našli najťažšiu, potrebujeme 125 guľôčok vyradiť a na jedno váženie vieme vylúčiť iba jednu, tak potrebujeme aspoň 125 vážení. Navyše 125 vážení stačí, pretože môžeme napríklad každú zo 125 guľôčok porovnať rovno s guľôčkou C, čím zároveň overíme, či je z nich najťažšia.

Ostáva nám ešte overiť, či A je ťažšia ako B a B je ťažšia ako C. Jedno váženie nám evidentne na overenie oboch vlastností stačiť nebude. Na dve porovnania to už vieme overiť napríklad tak, že porovnáme A s B a následne B s C.

To znamená, že dokopy potrebujeme 127 vážení, aby sme Peťovo tvrdenie overili.

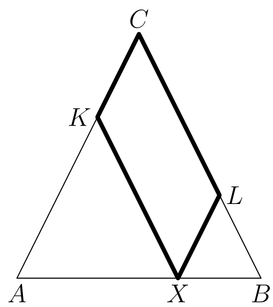
Úloha 27:

Parkovisko je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Trasa Kubovej prechádzky vedie po obvode rovnobežníka, ktorého dve strany ležia na ramenách trojuholníka ABC a jeho vrchol X leží na základni AB (ako na obrázku). Zistite, kde musí byť bod X, aby dĺžka trasy Kubovej prechádzky bola čo najkratšia, pričom bod X nemôže byť v bodoch A alebo B.



Výsledok: Bod X môže ležať kdekoľvek na základni AB (mimo jej krajných bodov), pretože dĺžka trasy prechádzky bude stále rovnaká.

Riešenie:



Nakreslíme si ľubovoľný takýto prípad a označíme si body ako v zadaní. Novovzniknutý bod na strane AC si označíme ako bod K a novovzniknutý bod na strane BC si označíme ako bod L.

Strana KX je rovnobežná so stranou CL, a teda uhly AXK a ABC sú súhlasné. Vďaka predchádzajúcemu zisteniu a tomu, že trojuholník ABC je rovnoramenný máme rovnosť $|\angle XAK| = |\angle BAC| = |\angle ABC| = |\angle AXK|$. Čo znamená, že trojuholník AXK je rovnoramenný so základňou AX. Z rovnakého dôvodu je rovnoramenný aj trojuholník XBL, so základňou XB.

Strana AK je teda rovnako dlhá ako KX. Tak isto aj strana LB je rovnako dlhá ako XL. Obvod rovnobežníka je preto rovný $|CK|+|KX|+|XL|+|LC| = |CK|+|KA|+|BL|+|LC| = |CA|+|CB|$. Úlohu sme riešili bez ujmy na všeobecnosti, čo znamená, že nezáleží na pozícii bodov K a L. Keďže bod X nemôže ležať v krajných bodoch základne trojuholníka, tak vidíme, že obvod rovnobežníka je stále rovnako veľký ako súčet dĺžok ramien trojuholníka ABC. Bod X sa teda môže nachádzať kdekoľvek na základni AB a trasa prechádzky bude rovnako dlhá.

Úloha 28:

Budova firmy je v tvare pravidelného n-uholníka, ktorý má 47 navzájom rôzne dlhých uhlopriečok. Nájdite minimálnu hodnotu n.

Výsledok: 96

Riešenie:

Nakoľko sa jedná o pravidelný n-uholník, počet rôzne dlhých uhlopriečok z jedného vrcholu bude rovnaký pre každý vrchol n-uholníka. Zoberme si ľubovoľný z vrcholov n-uholníka. Ním prechádza jedna os súmernosti daného n-uholníka. Tá delí n-uholník na dve rovnaké časti (budeme o nich hovoriť ako o poloviciach). Zároveň vieme, že každá uhlopriečka v jednej polovici má vďaka osovej súmernosti n-uholníka svoju „kópiu“ v druhej polovici (kópiou rozumieme uhlopriečku s rovnakou dĺžkou).

Zamerajme sa teraz na jednu z polovíc n-uholníka (napríklad tú ľavú). Vrchol bezprostredne naľavo od nášho zvoleného vrcholu s ním netvorí uhlopriečku. Všetky ďalšie áno a tieto uhlopriečky sú rôznych dĺžok. My potrebujeme 47 takýchto uhlopriečok, čo znamená, že v tejto polovici bude dokopy

49 vrcholov (ten zvolený, ten hneď vedľa a jeden pre každú uhlopriečku). Vďaka osovej súmernosti vieme, že nielen každá uhlopriečka, ale aj každý vrchol má svoju „kópiu" v druhej polovici. To znamená, že v nej je tiež 49 vrcholov.

Mohli by sme teda prehlásiť, že $n = 2 \cdot 49$, avšak nesmieme zabúdať, že vrcholy, ktoré ležia na osi súmernosti, sú v oboch polovičiach n-uholníka rovnaké. Takýto vrchol je buď jeden (pri nepárnom n), alebo dva (pri párnom n). Keďže my chceme mať n čo najmenšie, tak je jasné, že musíme pracovať s párnym počtom vrcholov. Kvôli tomu dva z vrcholov nebudú mať svoju „kópiu" v druhej polovici, a preto je vrcholov dokopy $2 \cdot 49 - 2 = 96$.

Úloha 29:

Adresy klientov firmy KER sú štvorciferné čísla. Koľko adries spĺňa podmienku, že ak vymažeme ľubovoľnú cifru adresy, tak vzniknuté trojciferné číslo je deliteľom pôvodnej adresy?

Výsledok: 14

Riešenie:

Hľadáme všetky štvorciferné čísla $\overline{ABCD}$ (kde A, B, C a D sú nejaké nie nutne rôzne cifry), v ktorých keď vyškrtneme ktorúkoľvek z cifier, dostaneme deliteľa pôvodného čísla. To znamená, že aj číslo $\overline{ABC}$ je deliteľom čísla $\overline{ABCD}$. Číslo $\overline{ABCD}$ vieme zapísať ako $\overline{ABC} \cdot 10 + D$. Celý tento výraz je deliteľný číslom $\overline{ABC}$. Keďže $\overline{ABC} \cdot 10$ je deliteľné číslom $\overline{ABC}$, tak aj číslo D musí byť deliteľné číslom $\overline{ABC}$, to nastane len vtedy, keď $D = 0$.

Zistili sme, že štvrtou cifrou je teda určite 0. Z čísla $\overline{ABCD}$ sa teda stáva $\overline{ABC}0$. Toto číslo musí byť deliteľné aj číslom $\overline{AB}0$ (po vyškrtnutí cifry C). $\overline{ABC}0$ vieme rozpísať ako $\overline{ABC} \cdot 10$ a $\overline{AB}0$ ako $\overline{AB} \cdot 10$. Keďže $\overline{AB} \cdot 10$ je deliteľom čísla $\overline{ABC} \cdot 10$, môžeme obe tieto čísla predeliť číslom 10 a dostávame, že $\overline{AB}$ je deliteľom čísla $\overline{ABC}$. $\overline{ABC}$ vieme rozpísať ako $\overline{AB} \cdot 10 + C$. Keďže $\overline{AB} \cdot 10$ je deliteľné číslom $\overline{AB}$, aj C musí byť deliteľné číslom $\overline{AB}$, to nastane len vtedy, keď $C = 0$.

Zistili sme, že treťou cifrou je tiež určite 0. Z čísla zo zadania sa nám teda stáva $\overline{AB}00$. Toto číslo musí byť podľa zadania určite deliteľné číslom $\overline{A}00$ (po vyškrtnutí cifry B). Keďže $\overline{A}00$ je deliteľom čísla $\overline{AB}00$, obe čísla môžeme vydeliť číslom 100, čím dostávame, že A je deliteľom čísla $\overline{AB}$. To vieme zapísať ako $A \cdot 10 + B$. Keďže $A \cdot 10$ je deliteľné cifrou A, tak aj B musí byť deliteľné cifrou A.

Číslo $\overline{AB}00$ je deliteľné aj číslom $\overline{B}00$ (po vyškrtnutí cifry A). Obe opäť môžeme predeliť číslom 100, čím dostávame, že B je deliteľom čísla $\overline{AB}$. Číslo $\overline{AB}$ vieme rozpísať ako $A \cdot 10 + B$. Keďže B je deliteľné cifrou B, tak aj číslo $A \cdot 10$ musí byť deliteľné cifrou B.

Keďže B je deliteľné cifrou A, tak B bude nejakým násobkom cifry A. To znamená, že B je väčšie alebo rovné A. Nakoľko číslo $A \cdot 10$ je deliteľné cifrou B, tak cifra B musí byť tvorená súčinom niektorých prvočísel z prvočíselného rozkladu čísla $A \cdot 10$ (pričom B musí obsiahnuť všetky prvočísla, ktoré tvoria A, pretože ináč by nebolo jeho násobkom).

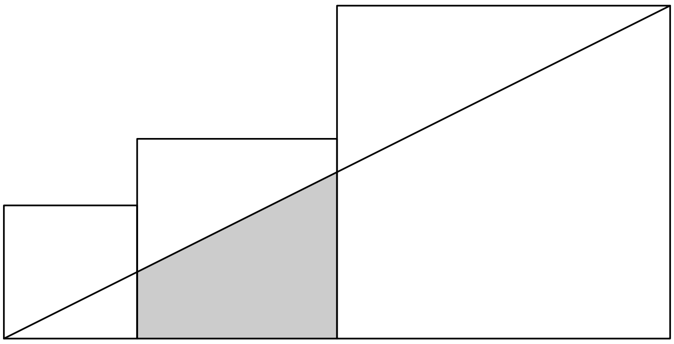
To znamená, že ak má byť cifra B väčšia ako cifra A, môže byť už iba vynásobená nejakým počtom prvočísel z prvočíselného rozkladu čísla 10 ($= 2 \cdot 5$). Číslo B sa teda môže rovnať buď A, $2 \cdot A$, $5 \cdot A$, alebo $10 \cdot A$. Miesto cifry A postupne dosadíme všetky možné cifry (1 až 9), ku ktorým do tabuľky vypíšeme možné hodnoty cifry (to značí iba tie jednociferné) B.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	1, 2, 5	2, 4	3, 6	4, 8	5	6	7	8	9

Keďže cifry C a D sa nemenia, stačí nám spočítať počet dvojíc A a B. Podľa tabuľky je ich 14.

Úloha 30:

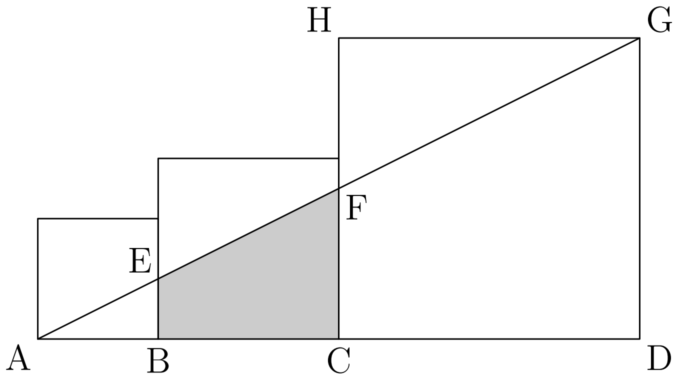
Manažér Peťo obľubuje futuristické obrazy. Jeden z nich vyzerá ako štvorce na obrázkoch, tie majú rozmery postupne 2, 3 a 5. Vypočítajte obsah sivej časti.



Výsledok: $5,25$

Riešenie:

Najprv si pomenujme body ako na obrázku.



Pozrime sa najprv na trojuholníky ABE a ADG. $|\angle ABE| = |\angle ADG| = 90°$, pretože sú to vnútorné uhly štvorcov. Uhol BAE je totožný s uhlom DAG, a teda trojuholníky ABE a ADG sú podobné podľa vety uu. Strany AB a AD sú v pomere $2 : 10 = 1 : 5$, takže aj strany BE a DG budú v rovnakom pomere, čiže $|BE| = 1/5 \cdot 5 = 1$.

Teraz sa pozrieme na trojuholníky ADG a GHF. $|\angle ADG| = |\angle GHF| = 90°$, pretože sú to vnútorné uhly štvorcov a $|\angle DAG| = |\angle HGF|$, pretože sú to striedavé uhly. Takže trojuholníky ADG a GHF sú tiež podobné podľa vety uu. Keďže $|GH| : |AD| = 1 : 2$, tak $|HF| = 1/2 \cdot 5 = 2,5$. To znamená, že $|CF| = |CH| - |FH| = 5 - 2,5 = 2,5$.

Teraz sa môžeme pozrieť na sivú časť obrázka, čiže na lichobežník $BCFE$ so základňami BE a CF. Vieme, že vzorec na výpočet obsahu lichobežníka je $(a + c) \cdot v/2$, kde a a c sú základne a v je výška lichobežníka. Keďže tento lichobežník je pravouhlý, do vzorca môžeme namiesto výšky dosadiť dĺžku strany kolmej na základne.

Potom obsah sivej časti sa rovná $(|BE| + |CF|) \cdot |BC|/2 = (1 + 2,5) \cdot 3/2 = 5,25$.

Úloha 31:

Zamestnanci firmy KER hrali exhibičný futbalový zápas proti zamestnancom firmy KVET. Zápas skončil 5 : 3. Koľko rôznych priebehov mohol zápas mať?

Pod priebehom zápasu rozumieme poradie, v ktorom dávali jednotlivé tímy góly.

Výsledok: 56

Riešenie:

V zápase padlo dokopy 8 gólov. Rôzne priebehy zápasov vieme rozlíšiť tým, v akom poradí góly padali. KVET strelil 3 góly, ostatných 5 strelil KER. Hľadáme, koľkými spôsobmi vieme vybrať 3 góly (tie, ktoré strelil KVET) z 8. Na prvý vybraný gól máme 8 možností, na druhý už iba 7 (keďže 1 gól sme už vybrali) a na tretí 6. To je spolu $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ možností. Musíme si teraz ale uvedomiť, že niektoré možnosti sme započítali viackrát. Priebeh zápasu, kde góly postupne strelili KER, KER, KVET, KER, KVET, KVET, KER, KER, sme vybrali tak, že sme vybrali čísla 3, 5, 6. Spôsobom, akým sme to vyberali, sme však mohli rovnako vybrať aj čísla 3, 6, 5; 5, 3, 6; 5, 6, 3; 6, 3, 5 a 6, 5, 3 a vždy by to bol bol ten istý priebeh zápasu. Vidíme, že každý priebeh zápasu sme vybrali šiestimi spôsobmi (lebo existuje $3! = 6$ možností ako usporiadať 3 rôzne vybrané čísla), započítať ho ale chceme iba raz. Preto je rôznych priebehov zápasu $336/6 = 56$.

Úloha 32:

Peťo ráno napísal na tabuľu čísla 10002, 10005, 10008 a tak ďalej až po 19998 (vrátane). Vždy, keď sa Michal najedol, prišiel a každé číslo na tabuli zmazal a nahradil jeho ciferným súčtom. Do večera už boli na tabuli iba jednociferné čísla. Koľko z týchto čísel bolo rovných 9?

Výsledok: 1111

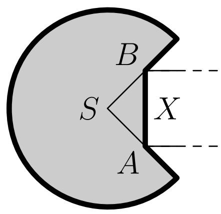
Riešenie:

Uvedomme si najprv, že číslo je deliteľné 9 práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný 9. Preto každá 9, ktorá ostala na tabuli, musela vzniknúť z čísla deliteľného 9. Takto môžeme pokračovať a vidíme, že aj pôvodné číslo na tabuli muselo byť deliteľné 9. Naopak čísla, ktoré na začiatku neboli deliteľné 9, mali ciferný súčet, ktorý nebol deliteľný 9, a následne ani ich ciferný súčet nemohol byť deliteľný 9.

Keďže, ako sme ukázali, pri prepísaní čísla sa deliteľnosť 9 nemení, počet 9 (teda počet čísel deliteľných 9) na konci zodpovedá počtu čísel deliteľných 9 na začiatku. Peťo napísal čísla od 10002 vždy s odstupom 3, takže každé tretie číslo bolo deliteľné 9. Na začiatku bolo na tabuli 3333 čísel, čiže 1111 z nich bolo deliteľných 9, čo je hľadaný počet deviatok.

Úloha 33:

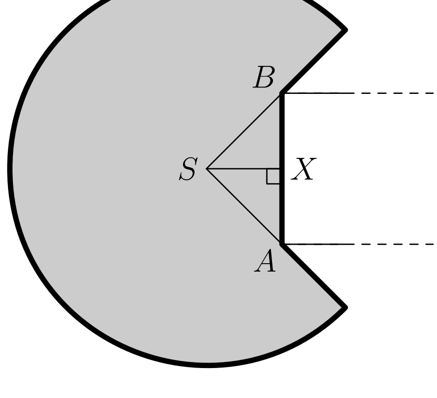
Oproti budove firmy vybudujú nový vysielač, ktorého signál dosahuje každým smerom 13 metrov. Avšak firemná budova jeho signál ruší a cez steny budovy sa signál nešíri (viď obrázok). Na akú plochu dosahuje signál vysielača, ak je budova od neho vzdialená 5 metrov, oba konce bližšej steny budovy sú od neho vzdialené rovnako a predná stena budovy je dlhá 10 metrov?



Výsledok: $\left(\frac{3}{4} \cdot 13^2 \cdot \pi + 25\right)\,\mathrm{m}^2$

Riešenie:

Plochu pokrytú signálom si vieme rozdeliť na dve časti. Prvá je kruh bez výseku, ktorý je určený trojuholníkom ABS, a druhá je trojuholník ABS.



Pozrime sa na trojuholník ABS. Keďže S je priamo oproti AB, tento trojuholník je rovnoramenný so základňou AB a výškou SX. Obsah tohto trojuholníka je $5 \cdot 10/2 = 25$.

Trojuholníky ASX a BSX sú pravouhlé s pravými uhlami pri vrchole X. Okrem toho sú tieto trojuholníky aj rovnoramenné, pretože X je v strede AB, a teda $|AX| = |BX| = 5 = |SX|$. Z toho vidíme, že tieto trojuholníky sú dokonca zhodné. Tým pádom sú uhly oboch trojuholníkov pri vrchole S $(180° - 90°)2 = 45°$. Uhol pri S v trojuholníku ABS je súčtom týchto uhlov, čo je $90°$.

Plný uhol má 360°. Trojuholník ABS teda určuje výsek, ktorý je štvrtinou celého kruhu ($90° \cdot 4 = 360°$). Obsah prvej časti preto vypočítame ako tri štvrtiny obsahu celého kruhu, čiže $(3/4) \cdot 13^2 \cdot \pi$. Na záver už stačí tieto dve čísla len sčítať.

Úloha 34:

Podzemná garáž firmy má tvar štvorca so stranou 250 metrov a je chodníčkami rozdelená na 625 štvorcových parkovacích miest so stranami 10 metrov. Strážnik Kubo z nejakého miesta na parkovisku spravil okružnú cestu po chodníčkoch, ktorá merala pol kilometra. Koľko najviac parkovacích miest môže byť uzavretých vo vnútri Kubovej okružnej cesty?

Výsledok: 156

Riešenie:

Najskôr sa pozrime, aký tvar mal Kubova trasa. Uvedomme si, že ak by to bol iný tvar ako obdĺžnik, tak by obišiel menej miest než, keby to obdĺžnik bol. Ak by Kubova trasa nebola obdĺžnik, určite by existoval nejaký väčší obdĺžnik, ktorý by obsahoval útvar, ktorý by Kubo obišiel. Kubova trasa potom predstavuje zachádzky do vnútra tohto obdĺžnika, pri ktorých vynecháva niektoré políčka. Nakoľko Kubo chodí po štvorcovej sieti, každá takáto zachádzka sa dá nahradiť rovnako dlhým alebo kratším úsekom cesty po obvode obdĺžnika, pri ktorom obíde aj pôvodne vynechané políčka.

Pozrime sa teraz, aké rozmery bude mať ten obdĺžnik. Má obvod 500 m, takže jeho dve susedné strany majú spolu dĺžku 250 m, čiže prechádzajú po 25 častiach chodníčka (každá časť chodníčka má dĺžku 10 metrov). Táto informácia je pre nás zaujímavá, pretože pomocou týchto dvoch strán vieme vypočítať obsah Kubovho obdĺžnika (čo je vlastne počet parkovacích miest, ktoré obišiel). Keďže strany obdĺžnika sú celé čísla (lebo obchádzame celé parkovacie miesta), máme 12 možností pre dĺžku kratšej strany.

Poďme si ich teda vyskúšať a tá, v ktorej je najväčší obsah obdĺžnika, je správnou odpoveďou. $1 \times 24 = 24$, $2 \times 23 = 46$, $3 \times 22 = 66$, $4 \times 21 = 84$, $5 \times 20 = 100$, $6 \times 19 = 114$, $7 \times 18 = 126$, $8 \times 17 = 136$, $9 \times 16 = 144$, $10 \times 15 = 150$, $11 \times 14 = 154$, $12 \times 13 = 156$. Obdĺžnik má najväčší obsah, keď strany majú dĺžky 12 a 13 (parkovacích miest). Poznamenajme, že to nie je náhoda, môžete si skúsiť rozmyslieť, že pre pevný obvod dostávame tým väčší obsah, čím viac sa obdĺžnik podobá na štvorec.

Úloha 35:

Vo firemnej jedálni podávajú 3 druhy predjedla, 4 rôzne polievky, 9 hlavných jedál a 4 rôzne dezerty. Koľko rôznych menu si vieme zostaviť, ak chceme mať 1, 2, 3, alebo všetky 4 chody?

Výsledok: 999

Riešenie:

Všimnime si, že úloha sa nás pýta na všetky možnosti, ako si vybrať nenulový počet jedál, pričom z každého druhu si môžeme vybrať najviac jedno jedlo.

Pozrime sa, koľko máme možností výberu predjedla. Okrem toho, že si môžeme objednať jedno z troch ponúkaných jedál, môžeme si ako predjedlo vybrať nič. Teda máme 4 možnosti, ako si vybrať predjedlo. Rovnako si môžeme dať nič aj ako polievku, hlavné jedlo alebo dezert, čo znamená, že máme 5 možností, ako si vybrať polievku, 10 možností, ako si vybrať hlavné jedlo, a 5 možností, ako si vybrať dezert.

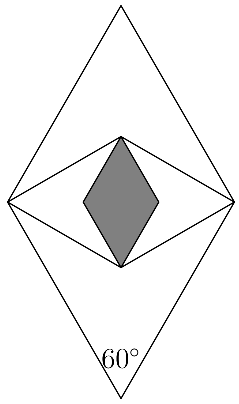
Teraz nám stačí tieto čísla vynásobiť a dostaneme počet možností, ktorými si môžeme vybrať jedno jedlo z každej kategórie (vždy vrátane prípadu, že si zvolíme nič).

$$4 \times 5 \times 10 \times 5 = 1000$$

Na záver však nesmieme zabudnúť, že medzi týmito možnosťami sa nachádza aj možnosť, v ktorej sme si z každého druhu jedla vybrali nič. Na túto možnosť sa nás ale zadanie nepýta a výsledok je teda o 1 menší.

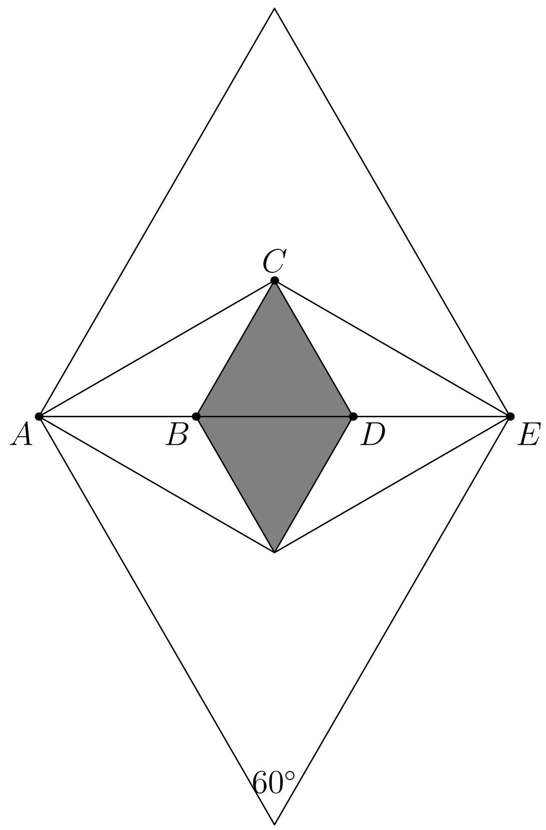
Úloha 36:

Ďalší z Peťových obľubených futuristických obrazov sú 3 navzájom podobné kosoštvorce. Akú časť veľkého rovnobežníka tvorí sivá plocha?



Výsledok: $\frac{1}{9}$

Riešenie:



Všetky kosoštvorce v úlohe sú podobné, a preto majú rovnaké uhly a dĺžky navzájom si odpovedajúcich strán sú vždy v rovnakom pomere.

Kosoštvorec s vnútorným uhlom 60° delí uhlopriečka spájajúca jeho vrcholy s tupými vnútornými uhlami na dva rovnoramenné (pretože kosoštvorec má všetky strany zhodné) trojuholníky s vnútornými uhlami pri hlavných vrcholoch s veľkosťou 60°, teda rovnostranné trojuholníky.

Označme si niektoré vrcholy ako na obrázku. Je známe, že uhlopriečky kosoštvorca sa navzájom rozpoľujú a sú na seba kolmé. Preto dlhšia uhlopriečka prostredného kosoštvorca AE je kolmá na jeho kratšiu uhlopriečku, ktorú pretína uprostred. Tá je však zároveň dlhšou uhlopriečkou malého (sivého) kosoštvorca. Jeho kratšia uhlopriečka BD je na ňu teda tiež kolmá a tiež ju pretína uprostred. Z toho plynie, že úsečky AE a BD ležia na jednej priamke.

Kosoštvorec je zrejme súmerný podľa svojej uhlopriečky. Preto je uhlopriečka vždy osou jeho vnútorného uhla a v prostrednom z našich kosoštvorcov je uhol CAE polovicou vnútorného uhla, čiže je veľký $60° : 2 = 30°$. Tento uhol je totožný s uhlom CAB. Ďalej uhol ACB vypočítame ako rozdiel polovice uhla ACE v prostrednom kosoštvorci (uhol ACE je vďaka rovnobežnosti protiľahlých strán kosoštvorca $180° - 60° = 120°$) a polovice vnútorného uhla BCD malého kosoštvorca, odkiaľ dostaneme $120° : 2 - 60° : 2 = 60° - 30° = 30°$.

Dostali sme, že uhly CAB a ACB sú zhodné. Odtiaľ $\triangle ABC$ je rovnoramenný so základňou AC, a teda $|AB| = |BC|$. Podľa zistenia z prvého odseku v rovnostrannom $\triangle BDC$ zas $|BC| = |BD|$. To značí, že $|AB| = |BD|$. Druhá strana obrázku je symetrická, preto obdobne platí $|BD| = |DE|$.

Kratšia uhlopriečka veľkého kosoštvorca je dlhá $|AE| = |AB| + |BD| + |DE| = 3|BD|$. Napokon, keďže tieto uhlopriečky si v podobných kosoštvorcoch zodpovedajú a pomer ich dĺžok je 1/3, pomer obsahov bude $(1/3)(1/3) = 1/9$.

Úloha 37:

Dvere kancelárií vo firme sú očíslované prirodzenými číslami a, b, c, d, e, f, g. Nájdite počet možností, ako môžu byť dvere očíslované, ak čísla spĺňajú nasledujúce rovnice: $abc = 70$, $cde = 71$, $efg = 72$.

Výsledok: 96

Riešenie:

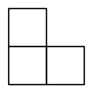
Číslo 71 je prvočíslo a dá sa ako súčin troch prirodzených čísel zapísať jedine ako $1 \cdot 1 \cdot 71$. Jedno z čísel c, d, e je 71. Nemôže to byť však c, lebo jeho násobok $abc = 70$ nie je deliteľný 71. Podobne ani e nie je 71, pretože ani 72 nie je násobkom 71. To znamená, že $d = 71$ a $c = e = 1$.

Z prvej rovnice po dosadení 1 za c dostávame $ab = 70$, z tretej po dosadení za e máme $fg = 72$. Hodnoty a, b, f a g nemusia spĺňať ďalšie podmienky, čiže máme niekoľko možností, ako vybrať a a b (je to počet spôsobov, ktorými vieme rozložiť 70 na súčin dvoch čísel), a nezávisle od toho niekoľko možností pre c a d (opäť je to počet možností rozkladu 72 na dva činitele).

Delitele 70 sú 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 a 70. Z týchto ôsmich čísel ktorékoľvek môžeme zvoliť za a, pričom potom necháme $b = 70/a$. Ďalej 72 má 12 deliteľov (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 a 72), z ktorých jeden sa stane f a jeden (jednoznačne ale daný výberom f) g. Preto možností, ako zvoliť dvojicu a a b a následne dvojicu f a g, teda všetky hľadané čísla, je spolu $8 \cdot 12 = 96$.

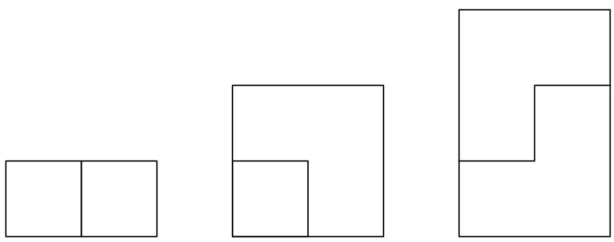
Úloha 38:

Firma KER stavia nové záchody. Koľkými spôsobmi vieme vydláždiť obdĺžnik 2×10 štvorčekmi 1×1 a triominami v tvare L (na obrázku), ak považujeme za rôzne aj dláždenia líšiace sa iba otočením?



Výsledok: 13377

Riešenie:



Uvedomme si, že budeme vlastne dláždiť náš obdĺžnik tromi obdĺžnikovými dlaždicami na obrázku. Totiž keď raz umiestnime L-triomino do obdĺžnika šírky 2, zvyšné prázdne políčko štvorca 2×2, v ktorom naše triomino leží, musí byť vyplnené buď monominom (samostatným štvorčekom 1×1), alebo ramenom ďalšieho triomina. Okrem toho sa v nejakom riadku môže aj nenachádzať ani jedno triomino. Naše dlaždice budeme označovať podľa ich výšky (dlaždice výšky 1, výšky 2, výšky 3), pričom vždy, keď použijeme dlaždicu výšky 2, budeme si vyberať jedno zo štyroch jej otočení a pri každom použití dlaždice výšky 3 si zvolíme jednu z dvoch jej podôb, keďže môže ešte byť osovo prevrátená.

Úlohu riešme tak, že ju postupne vyriešime pre obdĺžniky 2×0, 2×1 a tak ďalej, až dospejeme k riešeniu pre 2×10.

Určite existuje jediný spôsob, ako vyplniť obdĺžnik 2×0 – nepoužijeme žiadnu dlaždicu. Obdĺžnik 2×1 sa opäť dá vyplniť iba jedným spôsobom, a to jedinou dlaždicou výšky 1. Pre získanie obdĺžnika 2×2 môžeme použiť iba dlaždicu výšky 2, ktorá môže byť otočená štvorako, alebo dve dlaždice výšky 1. To je spolu 5 možností.

V obdĺžniku 2×3 sa pozrieme na to, aká dlaždica je prvá zhora. Ak je výšky 1, vydláždime zvyšok, čo je obdĺžnik 2×2, jedným zo spôsobov preň – ako sme už spočítali, tých je 5. Ak je výšky 2, môžeme ju orientovať štyrmi rôznymi spôsobmi a pri každom z nich nám zvýši obdĺžnik 2×1, ktorý možno vydláždiť iba jedným spôsobom. V poslednom prípade, keď táto dlaždica má výšku 3, je jedinou v celom obdĺžniku, takže rozhodneme, ako ju prevrátime (máme dve možnosti), a následne vydláždime zvyšok o rozmeroch 2×0 jediným možným spôsobom. V každom z týchto prípadov najprv rozhodneme o tom, ktorú dlaždicu položíme k hornému okraju, a potom si pre každý rozmer zvolíme jednu z orientácií dlaždice a jedno z dláždení menšieho obdĺžnika, ktorý nám ostane pod ňou (počty spôsobov vydláždenia menších obdĺžnikov už poznáme). Obdĺžnik 2×3 teda možno vydláždiť $1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 11$ spôsobmi.

Myšlienku z predchádzajúceho odseku si teraz zovšeobecníme. Uvažujme, že ideme vydláždiť obdĺžnik $2 \times n$. Najprv si zvolíme výšku dlaždice na hornom konci. Ak sme zvolili výšku 1, vložíme ju tam a vydláždime zvyšok o rozmeroch $2 \times (n-1)$. Pri výške 2 si vyberieme zo štyroch otočení a vydláždime $2 \times (n-2)$. V prípade výšky 3 si vyberieme z dvoch podôb a vydláždime obdĺžnik $2 \times (n-3)$. Túto myšlienku si zapíšeme symbolicky tak, že označíme a_n počet dláždení obdĺžnika $2 \times n$. Tým dostaneme vzťah, ktorý vyjadruje a_n v závislosti od hodnôt a_i pre rozmery i menšie než n.

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

Tento vzťah uplatníme niekoľkokrát, aby sme dostali odpoveď pre 2×10. Keďže už sme našli $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ a $a_3 = 11$, jednoducho dosadíme a vypočítame ďalšie členy.

$$\begin{aligned}
a_4 &= 11 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 33 \\
a_5 &= 33 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 87 \\
a_6 &= 87 + 4 \cdot 33 + 2 \cdot 11 = 241 \\
a_7 &= 241 + 4 \cdot 87 + 2 \cdot 33 = 655 \\
a_8 &= 655 + 4 \cdot 241 + 2 \cdot 87 = 1793 \\
a_9 &= 1793 + 4 \cdot 655 + 2 \cdot 241 = 4895 \\
a_{10} &= 4895 + 4 \cdot 1793 + 2 \cdot 655 = 13377
\end{aligned}$$

Úloha 39:

Počet stoličiek v zasadačke je kladné celé číslo $n \geq 301$, ktoré spĺňa

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2}{5}.$$

Koľko stoličiek môže byť v zasadačke? Nájdite aspoň jedno riešenie.

Výsledok: ktorékoľvek z čísel 448 až 584

Riešenie:

Nájsť všetky riešenia tejto úlohy je ťažké, našťastie nám stačí nájsť aspoň jedno n, ktoré spĺňa nerovnosť zo zadania. Pozrime sa najprv na druhú nerovnosť. Ak nájdeme také n, že počet zlomkov budú dve pätiny z neho, tak si môžeme byť istí, že táto nerovnosť je splnená. Je to tak preto, že všetky zlomky okrem $1/n$ sú od neho väčšie. Na to, aby sme takéto n našli, si môžeme napísať nasledovnú rovnicu, kde x je počet zlomkov a tým pádom $300 + x$ je n.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2}{5}(300 + x) \\
5x &= 600 + 2x \\
3x &= 600 \\
x &= 200
\end{aligned}$$

Pozrime sa teraz na druhú nerovnosť. Vieme, že všetky zlomky sú najviac $1/301$. A keďže ich je 200, čo je menej ako dve tretiny z 301, tak vieme, že aj druhá nerovnosť je určite splnená.

Úloha 40:

Kód na vstup do miestnosti sa vytvára tak, že do stroja vložíme vždy dve kladné celé čísla x a y. Stroj si vypočíta hodnoty $x^2 + y^2$, $297 - x^2$ a $402 - y^2$. Následne si tieto tri čísla porovná a kód bude najmenšie z nich. Aký najväčší kód takto vieme získať?

Výsledok: 233

Riešenie:

Súčet hodnôt, z ktorých stroj vyberá, je bez ohľadu na x a y rovný $x^2+y^2+297-x^2+402-y^2 = 699$. Medzi tromi číslami, ktorých súčet je 699, musí byť aspoň jedno, ktoré nepresahuje tretinu toho súčtu – 233. Teda najmenšie číslo tiež nemôže byť väčšie ako 233. Aby sme ukázali, že 233 je hľadaným maximom, musíme ešte dokázať, že sa dá aj dosiahnuť. To sa dá pre $x = 8$ a $y = 13$, keď $x^2 + y^2 = 297 - x^2 = 402 - y^2 = 233$.

Hádanky

Hádanka 1:

Zelený som, nie som tráva
Držím vodu, nie som ťava
Dopichám ťa, sprava, zľava!

Výsledok: kaktus

Hádanka 2:

Visí tisíc nosov,
nekosia sa kosou.
Oddávna až dosiaľ,
slniečkom sa kosia.

Výsledok: cencúľ

Hádanka 3:

Keď som bola v rozprávke, bola som Jankinou kamarátkou, lebo sa vysmievam Danke. Pri putovaní savanou som bola známa ako pytónica Anna. Teraz som tu a som pre teba veľkou záhadou. Čo som?

Výsledok: hádanka

Hádanka 4:

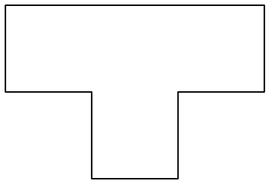
Poškrab ma na hlave a zimu tým poraz, čo bolo červené, bude černšie čoraz.

Výsledok: zápalka

Hlavolamy

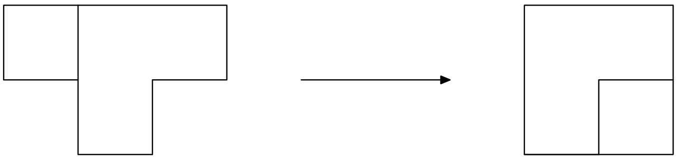
Hlavolam 1:

Obrázok je zložený zo 4 rovnakých štvorcov. Nájdite 3 spôsoby, ako útvar rozdeliť jedným rezom tak, aby sa dal zložiť do jedného veľkého štvorca.

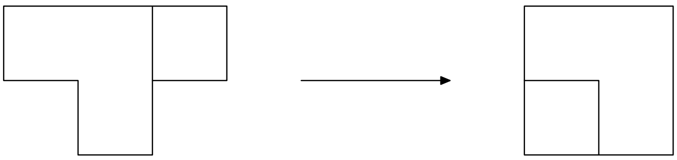


Riešenie:

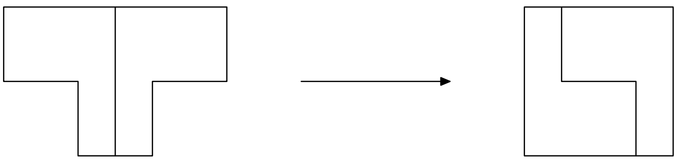
Ak odrežeme jeden z krajných štvorcov (napríklad ľavý), vieme ho jednoducho doplniť k zvyšným trom.



To vieme urobiť aj s druhým, z pravej strany.

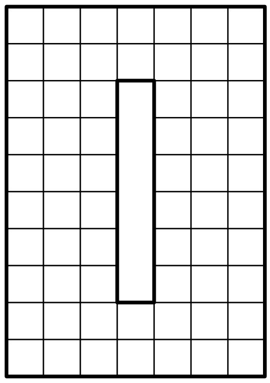


Ak útvar rozdelíme zvisle v polovici, tiež budeme vedieť poskladať veľký štvorec.

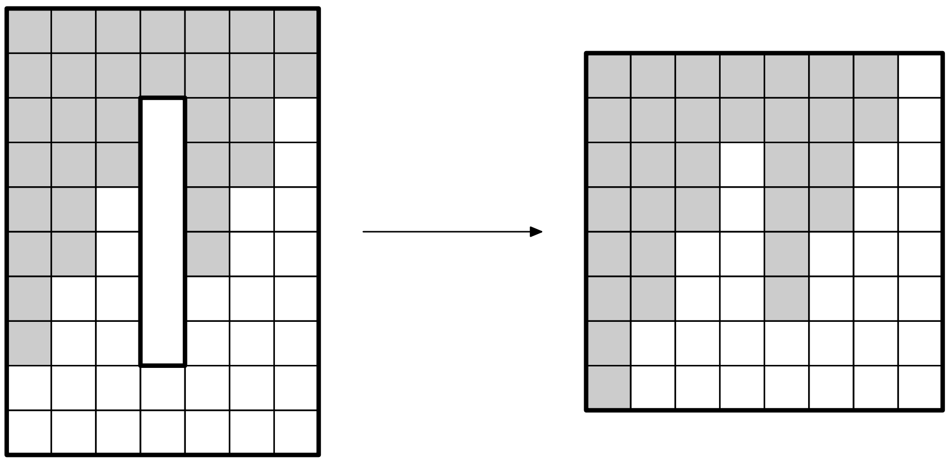


Hlavolam 2:

Rozrež obdĺžnik s dierou v strede na 2 časti tak, aby si z nich mohol zložiť štvorec 8×8 bez diery v strede.



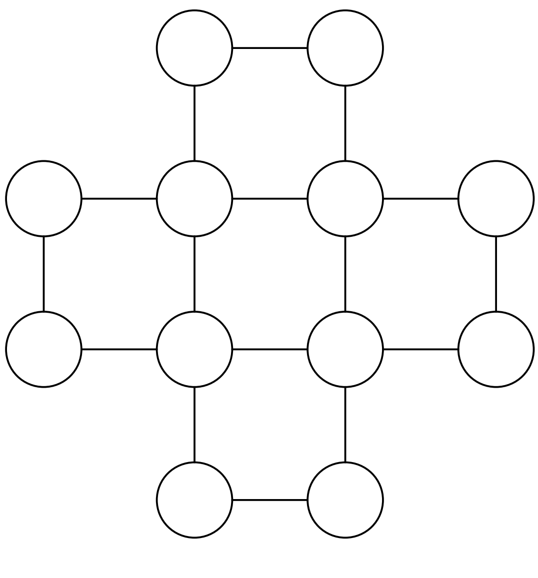
Riešenie:



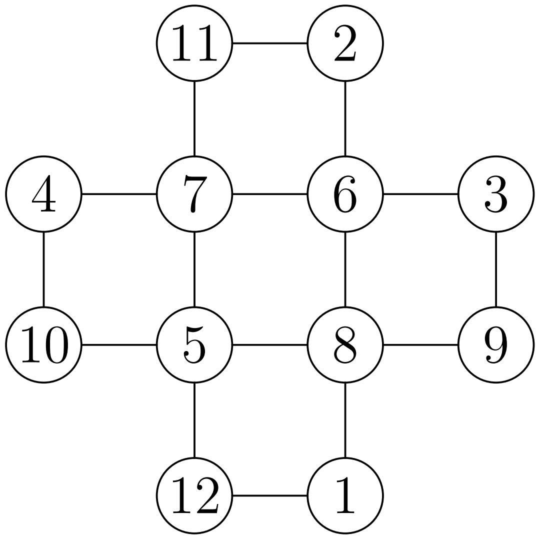
Hlavolam 3:

Vyplňte vrcholy štvorcov na nasledujúcom obrázku číslami od 1 do 12 tak, aby súčet vo vrcholoch v Vyplňte vrcholy štvorcov na nasledujúcom obrázku číslami od 1 do 12 tak, aby súčet vo vrcholoch v každom štvorci bol 26.

každom štvorci bol 26.



Výsledok:



Riešenie:

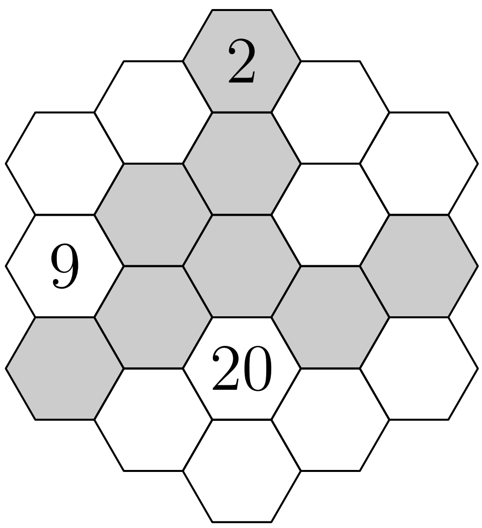
Úloha má mnoho rôznych riešení, toto je jedno z nich. K tomuto riešeniu sa vieme dopracovať nasledovne.

Súčet čísel v každom štvorci má byť 26. Keďže používame čísla od 1 do 12, vieme veľmi jednoducho vytvoriť dvojice so súčtom 13: $1 + 12$, $2 + 11$, $3 + 10$, $4 + 9$, $5 + 8$, $6 + 7$. Z dvoch takýchto dvojíc potom vieme jednoducho poskladať požadovaný súčet 26. Krajné čísla sa nám najjednoduchšie budú dopĺňať, ak do stredu dáme čísla s čo najmenším rozdielom.

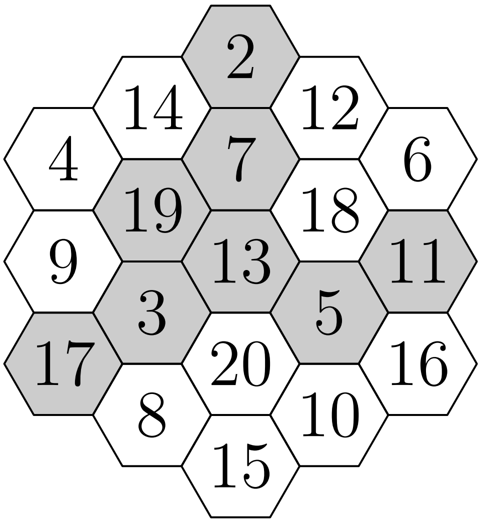
Zvoľme teda za stredné dvojice 5, 8 a 6, 7. K nim do horného a dolného štvorca doplníme ľubovoľné dvojice, v tomto prípade 11, 2 a 12, 1. V ľavom štvorci je aktuálne súčet 12, treba tam teda doplniť ešte 14. Miesto 10, 3 tam doplníme 10, 4 a na posledné dve miesta nám zvýšia 9 a 3, ktoré spolu s 6 a 8 dávajú požadovaný súčet 26.

Hlavolam 4:

Doplňte do políčok čísla tak, aby v každom políčku bolo číslo od 2 do 20 vrátane, každé práve raz. Zároveň musí platiť, že v susedných políčkach budú čísla s rozdielom väčším ako 4 a v sivých políčkach budú prvočísla.

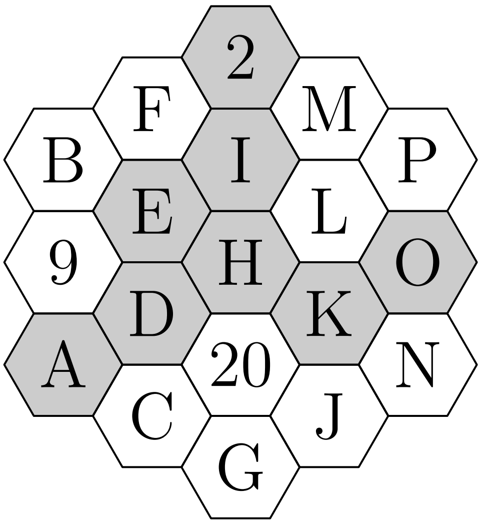


Výsledok:



Riešenie:

Označme si najprv prázdne políčka písmenami od A po P.



Pozrime sa najprv na políčko D. Musí v ňom byť prvočíslo a zároveň toto políčko susedí s políčkami 9 a 20, takže v ňom nemôžu byť čísla od 5 do 13 a od 16 do 20. Jediné ešte nevyužité prvočíslo mimo týchto intervalov je 3. V políčku D bude teda číslo 3.

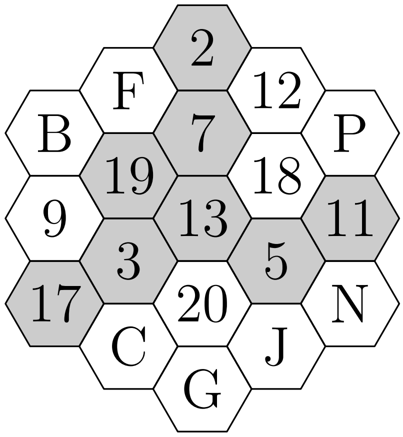
Na políčku H musia byť čísla mimo intervalov 2 až 7 a 16 až 20. Mimo nich sú iba dve prvočísla a to 11 a 13. Ak by na políčku H bolo 11, potom by na políčku I muselo byť prvočíslo mimo intervalu 2 až 15, teda 17 alebo 19. Tieto dve prvočísla sú ale jediné dve, ktoré môžu byť na políčkach A a E. Na políčku H preto musí byť číslo 13.

Na políčku I musí byť prvočíslo mimo intervalu 2 až 6 a 9 až 17. 19 to nemôže byť (musí byť na A alebo E), teda musí tam byť 7.

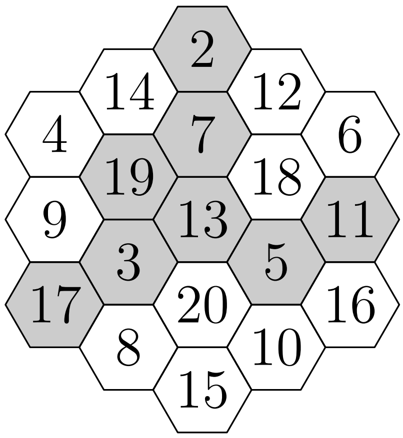
Pre políčka K a O nám zvyšujú prvočísla 11 a 5. 11 nemôže byť vedľa 13, takže na K je 5 a na O je 11.

Na políčku E nemôže byť 17 (pretože na H už máme 13), takže tam bude 19 a na A bude posledné nepoužité prvočíslo, 17.

Teraz sa budeme postupne pozerať na políčka, na ktorých môže byť iba jedno číslo, pretože ostatné sú buď v nejakom intervale, v ktorom nemôžu byť, alebo už sú použité. Na políčku L nemôžu byť čísla od 2 do 17, 19 a 20 už sú použité, bude tam teda 18. Na políčku M nemôžu byť čísla od 2 do 11 a od 14 do 20, 13 je použité, bude tam preto 12.



Takto budeme postupovať, až kým nevyplníme všetky políčka.



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2019 sa koná už 19. ročník tejto súťaže.

Trvanie súťaže je magických 99 minút. Na začiatku každý tím dostane 6 matematických úloh a 1 bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Po úspešnom vyrátaní úlohy vymení tím úlohu za novú. Po každej pätici správne vyriešených úloh tím dostane jeden bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Bonus sa odovzdáva rovnako ako úloha, ale už zaň tím nedostáva novú úlohu, iba sa mu zarátavajú body.

Tímy získavajú body podľa ročníkov súťažiacich v tíme, a to podľa nasledovnej tabuľky:

Ročník				Správny výsledok	
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	bonus
7	7	7	7	3,80	2
7	7	7	8	3,70	2
7	7	7	9	3,60	2
7	7	8	8	3,60	2
7	7	8	9	3,50	2
7	7	9	9	3,40	2
7	8	8	8	3,50	2
7	8	8	9	3,40	2
7	8	9	9	3,30	2
7	9	9	9	3,20	2
8	8	8	8	3,40	2
8	8	8	9	3,30	2
8	8	9	9	3,20	2
8	9	9	9	3,10	2
9	9	9	9	3,00	2

Zadania starších ročníkov nájdete na `matik.strom.sk/lomihlav`.

autori:	Jakub Genči, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Roman Staňo, Žaneta Semanišinová
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Erik Berta, Viktória Brezinová, Filip Csonka, Karin Eštoková, Jakub Farbula, Sara Gašparová, Martin Albert Gbúr, Gabriela Genčiová, Matej Hanus, Klára Hricová, Miriam Horvátová, Tomáš Kocák, Matúš Masrna, Michal Masrna, Jakub Mičko, Martin Mihálik, Lujza Milotová, Benjamín Mravec, Erik Novák, Patrik Paľovčík, Ján Richnavský, Martin Šalagovič, Martin Števko, Timea Szöllősová, Ľubomír Vargovčík, Štefan Vašak
názov:	**Lomihlav – 29. 11. 2019**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`matik.strom.sk/lomihlav` `www.itakademia.sk`

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje