Košický Matboj

Košice 26. 10. 2018

1. časť

<u>**Úloha 1.1:**</u> Troch členov rady Združenia STROM čaká hlasovanie o prijatí nového člena. Podľa stanov sa hlasuje najprv o tom, kto bude kandidát na prijatie (Žanetka alebo Kristín), a až v druhom kole sa hlasuje, či sa rada rozšíri alebo nie. Preferencie jednotlivých členov rady sú takéto:

- Janka: Kristín > nikto > Žanetka
- Robo: nikto > Kristín > Žanetka
- Tomáš: Žanetka > Kristín > nikto

Ako dopadne hlasovanie, ak sa všetci členovia rady chovajú racionálne a nikto nepozná preferencie ostatných?

Výsledok: Kristín

Riešenie: Keďže nikto nepozná preferencie ostatných, v každom kole sa bude každý člen rozhodovať tak, ako mu to kážu jeho preferencie (inak by mohol spôsobiť, že ním preferovaná možnosť neprejde, pretože zvyšní členovia môžu mať protichodné názory). V prvom kole Janka a Robo zahlasujú za Kristín a Tomáš za Žanetku. V druhom kole sa preto hlasuje, či sa Kristín stane členkou rady. Robo bude proti a Janka s Tomášom budú za, preto bude Kristín prijatá.

<u>**Úloha 1.2:**</u> Koľko je trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán a obvodom 28, keď zhodné trojuholníky zarátávame iba raz?

Výsledok: 16

Riešenie: Z trojuholníkovej nerovnosti vieme, že dĺžka najdlhšej strany nemôže byť väčšia ako 13. Riešenia sme obmedzili zhora a teraz už len potrebujeme systém ako ich spočítať. Budeme počítať počet trojíc (a, b, c) takých, že $a \geq b \geq c$. Následne pre každú možnú hodnotu a spočítame počet možností. Všimnime si, že vďaka tomu, ako sme si definovali trojicu a tomu, že prechádzame možnosti podľa najdlhšej strany, sme nezarátali žiaden trojuholník dvakrát.

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \hline 13 & 13 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 13 & 8 & 7 \end{array}}_{\text{6 možností}} \qquad \underbrace{\begin{array}{ccc} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \hline 12 & 12 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 12 & 8 & 8 \end{array}}_{\text{5 možností}} \qquad \underbrace{\begin{array}{ccc} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \hline 11 & 11 & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 11 & 9 & 8 \end{array}}_{\text{3 možnosti}} \qquad \underbrace{\begin{array}{ccc} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \hline 10 & 10 & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 9 & 9 \end{array}}_{\text{2 možnosti}}$$

Vidíme, že a nemôže byť menšie ako 10, pretože ak by bolo, musela by byť nejaká iná strana aspoň 10, čo je ale spor s predpokladom, že a je najdlhšia strana. Dokopy teda dostávame 16 rôznych trojuholníkov.

<u>**Úloha 1.3:**</u> Nech x, y sú reálne čísla spĺňajúce nasledovnú nerovnicu:

$$2 < \frac{x-y}{x+y} < 5.$$

Vypočítajte hodnotu $k = x/y$ ak viete, že k je celé číslo.

Výsledok: -2

Riešenie: Keďže vieme, že $k = x/y$, tak $x = k \cdot y$. Teraz toto x dosadíme do nerovnice a tú potom upravujeme tak, aby sme zistili možné hodnoty k:

$$2 < \frac{k \cdot y - y}{k \cdot y + y} < 5 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 < \frac{y \cdot (k-1)}{y \cdot (k+1)} < 5.$$

Keďže $y \neq 0$ (lebo $k = x/y$ je celé číslo), tak môžeme zlomok vykrátiť y a dostaneme

$$2 < \frac{k-1}{k+1} < 5.$$

Túto nerovnicu si upravíme tak, aby sme nemali neznámu v čitateli aj menovateli:

$$2 < \frac{k+1-2}{k+1} < 5 \quad \Longrightarrow \quad 2 < \frac{k+1}{k+1} - \frac{2}{k+1} < 5 \quad \Longrightarrow \quad 2 < 1 - \frac{2}{k+1} < 5 \quad \Longrightarrow \quad 1 < -\frac{2}{k+1} < 4.$$

Teraz už ľahko zistíme, že pre $k \leq -3$ je výraz v nerovnici medzi 0 a 1, pre $k = -2$ je výraz rovný 2, teda dáva riešenie, pre $k = -1$ nie je výraz definovaný (kvôli 0 v menovateli) a pre $k \geq 0$ je výraz záporný. Preto jediné riešenie je $k = -2$.

Úloha 1.4: Papier v tvare kruhu s polomerom 6 rozrežeme na šesť rovnakých kruhových výsekov. Z každého kruhového výseku vytvoríme plášť kužeľa bez podstavy. Aká je výška každého z kužeľov?

Výsledok: $\sqrt{35}$

Riešenie: Výšku kužeľa vieme vypočítať použitím Pytagorovej vety na pravouhlý trojuholník, kde je výška kužeľa jednou z odvesien. Zvyšnými dvoma stranami tohto trojuholníka budú strana kužeľa (prepona) a polomer jeho podstavy (druhá odvesna). Dĺžku strany kužeľa poznáme – je ňou polomer pôvodného kruhu, ktorý má dĺžku 6.

Polomer podstavy vieme zistiť z jej obvodu. Ten získame ako šestinu obvodu pôvodného kruhu, keďže ten sme rozrezali na 6 kruhových výsekov. Obvod podstavy bude

$$\frac{2\pi r}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi.$$

Polomer vieme dostať ako obvod podstavy vydelený 2π. Polomer podstavy má teda dĺžku

$$r = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Teraz už iba z Pytagorovej vety vypočítame výšku kužeľa a dostaneme $\sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$.

Úloha 1.5: Nech M je taká množina kladných celých čísel, že:

- Okrem iných čísel, M obsahuje aj číslo 2018.
- Aritmetický priemer čísel v množine M je 2010.
- Ak z množiny M odstránime číslo 2018, aritmetický priemer čísel v M sa zníži na 2009.

Aké najväčšie číslo môže množina M obsahovať?

Výsledok: 16044

Riešenie: Súčet všetkých čísel v množine M si označíme S a ich počet n. Keďže priemer čísel v množine M je 2010, tak platí

$$\frac{S}{n} = 2010.$$

Ak z množiny M odstránime číslo 2018, tak sa priemer zníži na 2009, čiže

$$\frac{S - 2018}{n - 1} = 2009.$$

Z oboch rovníc si vyjadríme celkový súčet S. Dostaneme tak

$$S = 2010n$$
$$S = 2009n + 9.$$

Porovnaním týchto výrazov dostaneme, že $2010n = 2009n + 9$, čiže $n = 9$. V množine M sa teda nachádza 9 čísel a ich celkový súčet je $S = 2010n = 2010 \cdot 9 = 18090$. Najväčšie možné číslo x aké môže množina obsahovať zistíme tak, že ostatných 8 čísel bude čo najmenších. Naša množina teda bude vyzerať $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2018, x\}$. Z celkového súčtu máme $x = 18090 - 2018 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 16044$.

Úloha 1.6: Nájdite všetky celé čísla x, pre ktoré $x - 3$ delí $x^2 - 3$ (deliteľnosť myslíme celočíselnú, čiže napr. -2 delí 4). Ako odpoveď zadajte súčet všetkých možných x.

Výsledok: 24

Riešenie: Pozrime sa na výraz $x^2 - 3$. Chceli by sme si ho zapísať ako nejaký násobok $x - 3$ a prípadný zvyšok. Výraz $x^2 - 3$ nám môže pripomínať známy vzorec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, z čoho $a - b$ by mohlo byť naše $x - 3$. Vtedy ale potrebujeme, aby $b^2 = 9$. Upravme teda $x^2 - 3$ podľa tejto úvahy:

$$x^2 - 3 = (x^2 - 3^2) + 6 = (x - 3)(x + 3) + 6.$$

Keďže chceme nájsť všetky také x, pre ktoré $x-3$ delí x^2-3, tak to znamená, že hľadáme x také, že $(x-3)$ delí $(x-3)(x+3)+6$, a teda $(x-3)$ musí deliť aj 6. Preto $x-3$ je rovné 6, 3, 2, 1, -1, -2, -3 alebo -6, z čoho dostaneme x rovné 9, 6, 5, 4, 2, 1, 0 a -3. Súčet všetkých možných x je 24.

Úloha 1.7: Máme nekonečnú postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ kladných celých čísel. Platí, že $a_1+a_2=28$, $a_3+a_4=-11$ a vo všeobecnosti pre všetky kladné celé čísla n platí, že $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$. Zistite súčet $a_{12}+a_{123}+a_{1234}$.

Výsledok: -13

Riešenie: Vďaka vzťahu $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ si vieme vyjadriť členy a_3, a_4 ako $a_3=a_2-a_1$ a následne $a_4=a_3-a_2=a_2-a_1-a_2=-a_1$. Zo zadania máme teda dve rovnice:

$$a_1+a_2=28$$
$$a_2-2a_1=-11.$$

Po vyjadrení a_2 z prvej rovnice a dosadení do druhej máme $28-a_1-2a_1=-11$. Odkiaľ dorátame, že $-3a_1=-39$, a teda $a_1=13$. Následne máme $a_2=15$. Teraz si skúsime pomocou vzťahu $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ vyčísliť prvých niekoľko členov postupnosti. Dostaneme $a_1=13$, $a_2=15$, $a_3=2$, $a_4=-13$, $a_5=-15$, $a_6=-2$, $a_7=13$, $a_8=15$.

Keďže členy a_7 a a_8 sú rovnaké ako a_1 a a_2 a každé ďalšie číslo v postupnosti závisí len na svojich dvoch predchodcoch, tak sa nám v postupnosti vytvoril cyklus dĺžky 6, ktorý sa bude donekonečna opakovať.

Teraz si už stačí iba uvedomiť, že vzhľadom na to, že sa nám v postupnosti opakuje dookola 6 členov, tak člen $a_{12}=a_6=-2$, $a_{123}=a_3=2$ a člen $a_{1234}=a_4=-13$. Súčet je rovný $a_{12}+a_{123}+a_{1234}=-2+2-13=-13$.

Úloha 1.8: Nech a, b, c sú kladné celé čísla také, že $3a=c^3$ a $5a=b^2$ a zároveň neexistuje šiesta mocnina prvočísla, ktorá by delila a. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu a.

Výsledok: 1125

Riešenie: Na to, aby číslo, ktorého prvočíselný rozklad je $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_l^{\alpha_l}$, bolo k-tou mocninou nejakého kladného celého čísla, musí platiť, že všetky α_i sú deliteľné číslom k.

Nech $a=3^x\cdot 5^y\cdot r$, kde r je kladné celé číslo nesúdeliteľné s troma a piatimi. Preto dosadením za a dostaneme, že $c^3=3a=3\cdot 3^x\cdot 5^y\cdot r=3^{x+1}\cdot 5^y\cdot r$, čiže potrebujeme, aby $x+1$ a y boli deliteľné troma. Z toho x má zvyšok 2 a y má zvyšok 0 po delení troma. Rovnako z druhej rovnice dostaneme, že x má zvyšok 0 a y má zvyšok 1 po delení dvoma.

Pozrime sa na číslo r. Aby sme splnili zadanie, tak to musí byť tretia mocnina nejakého kladného celého čísla, lebo r je nesúdeliteľné s troma a zároveň druhá mocnina nejakého kladného celého čísla, lebo r je nesúdeliteľné s piatimi, z čoho dostávame, že to musí byť šiesta mocnina nejakého kladného celého čísla, čo je ale v spore so zadaním, okrem prípadu, kedy $r=1$. Následne už iba zistíme najväčšie možné hodnoty x a y, ktoré musia byť menšie ako 6. Vyhovuje riešenie $a=3^2\cdot 5^3=1125$.

Úloha 1.9: Nájdite všetky usporiadané trojice reálnych čísel (a, b, c), kde $a\le b\le c$, ktoré spĺňajú:

$$ab+c=6, \qquad bc+a=6, \qquad ca+b=6.$$

Výsledok: $(1,1,5)$, $(2,2,2)$, $(-3,-3,-3)$

Riešenie: Odčítaním tretej rovnice od prvej dostávame:

$$ab+c-ca-b=0 \implies a(b-c)=b-c \quad (\bigstar).$$

Rozoberme dva prípady:

1. $b-c\neq 0$: Potom môžeme $(\bigstar)$ ekvivalentne vydeliť výrazom $b-c$ a máme $a=1$. Dosadením do zadania dostaneme ďalšiu sústavu rovníc: $b+c=6$ a $bc+1=6$. Vyjadrením b z prvej z dvoch rovníc máme $b=6-c$ a dosadením do druhej: $(6-c)c+1=6 \implies 6c-c^2+1=6 \implies (c-5)(c-1)=0$, čo znamená, že c môže nadobúdať hodnotu 1 alebo 5. Oba prípady rozoberme:

    (a) $c=1$: Dosaďme spolu s $a=1$ do zadania, vyjadríme b ako poslednú neznámu a dostaneme riešenie sústavy $(a,b,c)=(1,5,1)$, čo však nespĺňa podmienku, že $a\le b\le c$. Táto možnosť preto nevedie k riešeniu úlohy.

(b) $c = 5$: Dosaďme spolu s $a = 1$ do zadania, vyjadríme b ako poslednú neznámu a dostaneme $(a, b, c) = (1, 1, 5)$, čo je riešenie.

2. $b-c = 0$: Dosadením $b = c$ do zadania dostávame ďalšiu sústavu rovníc: $ab+b = 6$ a $b^2+a = 6$. Ak druhú odčítame od prvej dostávame: $ab+b-b^2-a = 0$, čo vieme upraviť ako: $a(b-1)+b(1-b) = (b-1)(a-b) = 0$. Táto rovnica platí v dvoch prípadoch:
   (a) $b = 1$. Dosadením do $ab + b = 6$ a spolu s tým, že $b = c$ máme riešenie sústavy $(a, b, c) = (5, 1, 1)$. To však nie je riešenie úlohy, pretože nesplĺňa podmienku $a \leq b \leq c$.
   (b) $a = b$. Dosadením do $ab + b = 6$, máme $a^2 + a = 6 \implies (a + 3)(a - 2)$, čo dáva pre a dve riešenia. Rozoberme obe:
      i. $a = 2$, čo spolu s tým, že $a = b = c$ dáva riešenie $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.
      ii. $a = -3$, čo spolu s tým, že $a = b = c$ dáva riešenie $(a, b, c) = (-3, -3, -3)$.

Ostáva zhrnúť riešenia: $(a, b, c) \in \{(1, 1, 5), (2, 2, 2), (-3, -3, -3)\}$

Úloha 1.10: Majme trojuholník ABC s vnútornými uhlami pri vrcholoch A, B, C postupne 50°, 60°, 70°. V tomto trojuholníku zostrojíme bod I ako stred vpísanej kružnice a spustíme z neho kolmice na všetky strany trojuholníka. Päty týchto kolmíc označme A_1, B_1 a C_1 (bod A_1 sa nachádza oproti bodu A, bod B_1 oproti B a C_1 oproti C). Potom z I spustíme kolmice na strany trojuholníka $A_1B_1C_1$ a ich päty vytvoria trojuholník $A_2B_2C_2$ (nový bod vždy vznikne na strane oproti pôvodnému). Takto budeme postupovať stále dookola. Aké sú vnútorné uhly v trojuholníku $A_{17}B_{17}C_{17}$?

Výsledok: 55°, 60°, 65°

Riešenie: Bod I je priesečníkom osí vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Vidíme, že štvoruholník IA_1CB_1 má dva protiľahlé uhly pravé, čo znamená, že je tetivový. Preto $|\sphericalangle IA_1B_1| = |\sphericalangle ICB_1| = 35°$ (obvodový uhol nad tetivou IB_1) a taktiež $|\sphericalangle IB_1A_1| = |\sphericalangle ICA_1| = 35°$. Tetivovým štvoruholníkom je z rovnakého dôvodu aj IB_1AC_1 (získavame $|\sphericalangle IB_1C_1| = |\sphericalangle IC_1B_1| = 25°$) a taktiež štvoruholník IC_1BA_1 (získavame $|\sphericalangle IC_1A_1| = |\sphericalangle IA_1C_1| = 30°$). Veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku $A_1B_1C_1$ sú teda postupne 65°, 60° a 55°.

Teraz nájdeme veľkosti vnútorných uhlov v $A_2B_2C_2$. Opäť vidíme tri tetivové štvoruholníky a analogicky získavame veľkosti uhlov – postupne 65°, 60° a 55°.

Postup zopakujeme aj pre uhly v trojuholníku $A_3B_3C_3$ a dostávame veľkosti uhlov postupne 50°, 60° a 70°. To znamená, že trojuholník $A_3B_3C_3$ je podobný s trojuholníkom ABC a navyše vidíme, že osi uhlov trojuholníka ABC sú osami odpovedajúcich uhlov aj v trojuholníku $A_3B_3C_3$.

Teraz si musíme uvedomiť, že po každých troch opakovaniach sa dostávame do rovnakej situácie, ako sme boli na začiatku. Trojuholník $A_{17}B_{17}C_{17}$ bude preto podobný s trojuholníkom $A_1B_1C_1$, čo znamená, že veľkosti jeho uhlov sú 65°, 60° a 55°.

Úloha 1.11: Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že $n(n + 16)$ je druhou mocninou celého čísla.

Výsledok: $\{2, 9\}$

Riešenie: Výraz zo zadania vieme pre kladné celé číslo n ohraničiť ako:

$$n^2 < n(n + 16) = n^2 + 16n < n^2 + 16n + 64 = (n + 8)^2.$$

Odtiaľ vidíme, že ak existuje také n, že $n^2 + 16n$ je štvorec, tak tento štvorec má tvar $n^2 + 16n = (n + k)^2$ $(\bigstar)$, kde k je kladné celé číslo také, že $1 \leq k < 8$. Roznásobme pravú stranu vzťahu $(\bigstar)$:

$$n^2 + 16n = n^2 + k^2 + 2nk \implies 2(8n - nk) = k^2,$$

odkiaľ vidíme, že k je párne, čo spolu s ohraničením $1 \leq k < 8$ znamená, že nám stačí rozobrať tri prípady:

1. $k = 2$: Ak dosadíme do $(\bigstar)$ máme: $n^2 + 16n = (n + 2)^2 = n^2 + 4 + 4n \implies 12n = 4$, čo nevedie na celočíselné riešenie pre n, čo je spor.
2. $k = 4$: Ak dosadíme do $(\bigstar)$ máme: $n^2 + 16n = (n + 4)^2 = n^2 + 16 + 8n \implies 8n = 16$, odkiaľ dostávame riešenie $n = 2$.
3. $k = 6$: Ak dosadíme do $(\bigstar)$ máme: $n^2 + 16n = (n + 6)^2 = n^2 + 36 + 12n \implies 4n = 36$, odkiaľ dostávame riešenie $n = 9$.

Zhrnutím dostávame dve riešenia: $n \in \{2, 9\}$.

Úloha 1.12: Koľko reálnych riešení má rovnica $x^2 + 10000\lfloor x \rfloor = 10000x$? Číslo $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x, čo je najväčšie celé číslo také, ktoré je menšie alebo rovné číslu x.

Výsledok: 199

Riešenie: Pre každé číslo x platí $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, kde $\{x\}$ je desatinná časť čísla x. Preto môžeme prepísať rovnicu zo zadania do tvaru $x^2 = 10000\{x\}$. Ľavá strana (ĽS) rovnice je parabola a pravá strana (PS) je po častiach lineárna funkcia. Presnejšie PS je lineárna funkcia pre $x \in \langle n, n+1)$, kde n je celé číslo. Navyše na tomto intervale funkcia nadobúda všetky hodnoty z $\langle 0, 10000)$. Pre intervaly $\langle -100, -99), \ldots, \langle 98, 99)$ graf funkcie x^2 začína nad grafom (resp. na úrovni grafu) funkcie $10000\{x\}$ a končí pod. Navyše, obe funkcie sú na jednotlivých intervaloch spojité, a preto sa ich grafy musia niekedy pretnúť. Pretnú sa dokonca práve raz, pretože parabola a priamka môžu mať maximálne dva spoločné body, a to len v prípade, ak by lineárna funkcia začala pod parabolou a skončila by tiež pod parabolou, čo ale nenastalo ani na jednom z intervalov.

Na intervale $\langle 99, 100)$ je graf funkcie $10000\{x\}$ stále pod grafom funkcie x^2 a rovnako je to aj pre akékoľvek iné $x \in (-\infty, -100) \cup \langle 100, \infty)$, keďže funkcia x^2 tu nadobúda hodnoty väčšie ako 10000. Preto je riešení toľko, ako intervalov $\langle -100, -99), \ldots, \langle 98, 99)$, ktorých je 199.

2. časť

Úloha 2.1: Nahraďte písmená číslicami tak, aby platilo $\overline{MM5}/\overline{N5} = 5$. Ako odpoveď zadajte číslo $10N + M$.

Výsledok: 42

Riešenie: Pomocou dekadického zápisu čísla si prepíšeme $\overline{MM5}$ ako $100M + 10M + 5 = 110M + 5$ a $\overline{N5}$ ako $10N + 5$. Riešime rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{110M+5}{10N+5} &= 5 \\ 110M + 5 &= 5 \cdot (10N+5) = 50N + 25 \\ 110M &= 50N + 20 = 10 \cdot (5N+2) \\ 11M &= 5N + 2. \end{aligned}$$

Ľavá strana rovnice je deliteľná 11, takže aj pravá musí byť. Hľadáme také N, kedy $5N + 2$ je deliteľné 11, teda $5N + 2$ môže nadobúdať len hodnoty 0, 11, 22, 33 alebo 44 (keďže N je cifra, a teda $5N + 2$ je najviac 47). Ako jediné vyhovuje $N = 4$, teda $5N + 2 = 22$, a preto $M = 2$. Môžeme ešte overiť, či to sedí: $225/45 = 5$. Hľadané číslo $10N + M$ je teda 42.

Úloha 2.2: Zo skupiny šiestich účastníkov – Adam, Braňo, Cyril, Dano, Eva, Freďo – je potrebné vytvoriť súťažný tím s dvoma až šiestimi členmi. Adam môže ísť iba ak pôjde Braňo. Ak pôjde Cyril, tak nepôjde Dano, ani Eva. Ak pôjde Freďo, Adam nepôjde. Koľkými spôsobmi sa dá zostaviť tím tak, aby boli splnené všetky podmienky?

Výsledok: 19

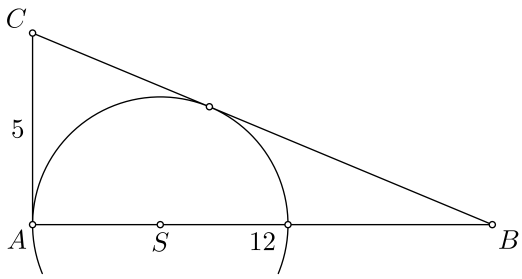
Riešenie: Najprv sa pozrime na prípady, keď v tíme nie je Braňo (to znamená, že tam nebude ani Adam). Hneď môžeme vidieť, že jedno zo zložení tímu je Dano a Eva. Môžeme si všimnúť, že Freďo môže byť v dvojici s kýmkoľvek okrem Adama (a Braňa), a dokonca môže vzniknúť aj trojica v zložení Freďo, Dano, Eva. Zatiaľ teda máme 4 možnosti, kde je tímom dvojica (aj Dano s Evou) a 1, kde je to trojica. Žiadne iné zloženie tímu kde je Freďo a nie je Braňo vzniknúť nemôže, keďže kvôli Cyrilovi nechcú byť v tíme až dvaja ľudia.

Čo ak v tíme bude Braňo? Najprv skúsime nájsť tím s čo najväčším počtom ľudí. Keďže kvôli Cyrilovi nepôjdu dvaja ľudia, tak Cyril v tíme nebude. Zároveň tam môže byť iba jeden z dvojice Adam a Freďo. To znamená, že nám môžu vzniknúť štvorice Braňo, Adam, Dano, Eva alebo Braňo, Freďo, Dano, Eva. Keď by sme z týchto štvoríc vytvorili aj tímy s menším počtom ľudí (trojice a dvojice), v ktorých je Braňo, tak dostávame dokopy 9 ďalších nových možností (do toho nerátame tie dve štvorice). Zostáva nám zistiť, aké môžu byť rozdelenia kde je Braňo aj Cyril. Táto dvojica je v poriadku, no môžeme tam prihodiť ešte aj Adama alebo Freďa – to sú ďalšie 3 možnosti.

Dokopy teda máme $5 + 9 + 2 + 3 = 19$ možností. Na záver uvádzame ešte prehľad všetkých možností (mená sú skrátené iba na začiatočné písmená):

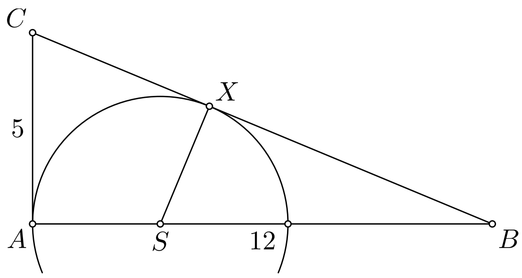
- Tímy bez Braňa: DE, FC, FD, FE, FDE.
- Tímy s Braňom a bez Cyrila: $BADE$, $BFDE$, BAD, BAE, BFD, BFE, BDE, BA, BF, BD, BE.
- Tímy s Braňom a Cyrilom: BC, BCA, BCF.

Úloha 2.3: Majme pravouhlý trojuholník ABC s odvesnami AB a AC s veľkosťami postupne 12 a 5. Na strane AB zvolíme bod S tak, že kružnica k so stredom S, prechádzajúca bodom A, sa dotýka strany BC tak, ako je to znázornené na obrázku. Aká je veľkosť polomeru kružnice k?



Výsledok: 10/3

Riešenie: Označme si bod dotyku kružnice k so stranou BC ako bod X. Polomer kružnice je v bode dotyku kolmý na dotyčnicu, preto vieme, že $|\measuredangle SXC| = |\measuredangle SXB| = 90°$. A taktiež, že $|AS| = |XS| = r$, keďže sa jedná o polomery kružnice k.



Trojuholník BXS je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole X a uhlom β pri vrchole B a so stranami

$$\begin{aligned}|XS| &= r,\\ |SB| &= |AB| - |AS| = 12 - r.\end{aligned}$$

Trojuholník BAC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A a uhlom β pri vrchole B a so stranami

$$\begin{aligned}|AC| &= 5,\\ |CB| &= \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.\end{aligned}$$

Trojuholníky BXS a BAC sú podobné podľa vety uu, a teda pomery prislúchajúcich strán sa rovnajú:

$$\frac{|XS|}{|AC|} = \frac{|SB|}{|CB|}.$$

Už len dosadíme príslušné dĺžky strán a dopočítame polomer kružnice:

$$\begin{aligned}\frac{r}{5} &= \frac{12 - r}{13}\\ 13r &= 60 - 5r\\ 18r &= 60\\ r &= 10/3.\end{aligned}$$

Polomer kružnice k je teda 10/3.

Úloha 2.4: Nájdite všetky prvočísla, ktoré môžeme vyjadriť ako súčet a zároveň aj rozdiel dvoch iných prvočísel.

Výsledok: 5

Riešenie: Jediné párne prvočíslo je 2, to však nevieme vyjadriť ako súčet žiadnych dvoch prvočísel. Preto hľadané prvočíslo (označme ho x) musí byť nepárne. Nepárne číslo vieme získať iba ako súčet párneho a nepárneho čísla. To znamená, že v súčte aj rozdiele použijeme určite číslo 2, a teda $2 + p = x$ a $q - 2 = x$, kde p a q sú prvočísla. Inak povedané, čísla $x - 2$, x aj $x + 2$ sú prvočísla. Všetky tri majú rôzny zvyšok po delení číslom 3, čiže aspoň jedno z nich je deliteľné tromi. Jediné prvočíslo spĺňajúce túto podmienku je 3, preto $x - 2 = 3$ a $x = 5$.

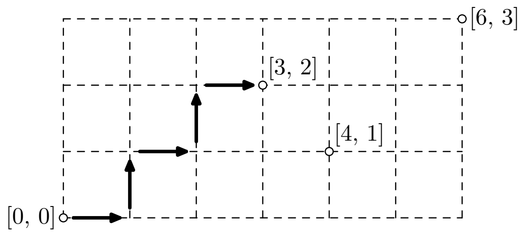
Úloha 2.5: Taxikár sa pohybuje po hranách štvorčekovej siete. Začína v bode $[0, 0]$ a ide do bodu $[6, 3]$. V bodoch $[4, 1]$ a $[3, 2]$ sú dopravné kontroly. Aká je pravdepodobnosť, že sa kontrolám vyhne, ak v každom kroku z križovatky $[a, b]$, kde $a < 6$ a $b < 3$ s pravdepodobnosťou 1/2 zamieri na križovatku $[a + 1, b]$ a s pravdepodobnosťou 1/2 na križovatku $[a, b + 1]$ a z ostatných križovatiek mieri priamo ku križovatke $[6, 3]$? Výsledok napíšte ako zlomok v základnom tvare.

Výsledok: 17/32

Riešenie: Pravdepodobnosť, že sa taxikár vyhne kontrole nám v súčte s pravdepodobnosťou, že taxikár narazí na kontrolu dáva 1. Preto sa nám stačí pozrieť na to, aká je pravdepodobnosť, že taxikár narazí na kontrolu. Keďže sa taxikár pohybuje len smerom doprava a hore, cestou nemôže naraziť na obe kontroly. Preto si to môžeme rozlíšiť dva prípady:

- Aká je pravdepodobnosť, že taxikár narazí na kontrolu na križovatke $[3, 2]$?
- Aká je pravdepodobnosť, že taxikár narazí na kontrolu na križovatke $[4, 1]$?

Najskôr rozoberieme prvý prípad. Vezmime si ľubovoľnú cestu z $[0, 0]$ do $[3, 2]$, napríklad cestu znázornenú na nasledujúcom obrázku. Aká je pravdepodobnosť, že taxikár prejde touto cestou a narazí na hliadku na križovatke $[3, 2]$?



Na každej križovatke s pravdepodobnosťou 1/2 taxikár ostane na ceste a s pravdepodobnosťou 1/2 z cesty odbočí (tu sme využili, že žiadna križovatka nemá prvú súradnicu 6 alebo druhú súradnicu 3, kde by taxikár nemal na výber a musel by ísť priamo k bodu $[6, 3]$). Pozdĺž cesty máme 5 križovatiek, na ktorých sa musí taxikár vybrať správnym smerom, a preto pravdepodobnosť, že ostane na tejto ceste je $(1/2)^5 = 1/32$. Ciest z bodu $[0, 0]$ do bodu $[3, 2]$ je $\binom{5}{2} = 10$ (z piatich presunov vyberáme dva, ktoré sú doprava) a každá z týchto ciest má pravdepodobnosť 1/32, že ňou taxikár pôjde. Preto je pravdepodobnosť, že taxikár pôjde jednou z týchto ciest, a teda, že prejde bodom $[3, 2]$, rovná 10/32.

Rovnakým spôsobom dostaneme, že z bodu $[0, 0]$ do bodu $[4, 1]$ vedie 5 ciest a každá z týchto ciest má pravdepodobnosť 1/32. Preto je pravdepodobnosť, že taxikár pôjde cez bod $[4, 1]$ rovná 5/32.

Preto dostávame, že taxikár narazí na kontrolu s pravdepodobnosťou $10/32 + 5/32 = 15/32$, a teda pravdepodobnosť, že sa kontrole vyhne je $1 - 15/32 = 17/32$.

Úloha 2.6: Majme postupnosť kruhov s obsahmi $S_1, S_2, \ldots, S_{2018}$. Súčet obsahov všetkých týchto kruhov je 2019π a pre jednotlivé obsahy platí vzťah $S_{n+1} = S_1 + S_n$. Zistite polomer kruhu s obsahom S_{1009}.

Výsledok: 1

Riešenie: Platí, že naše obsahy si vieme napísať ako

$$S_{n+1} = S_1 + S_n = S_1 + S_1 + S_{n-1} = S_1 + S_1 + S_1 + S_{n-2} = \cdots = (n + 1) \cdot S_1,$$

pričom toto platí pre ľubovoľné $n \geq 1$ a pre súčet všetkých členov dostávame

$$S_1 + S_2 + S_3 \cdots + S_{2018} = S_1 + 2 \cdot S_1 + 3 \cdot S_1 + \cdots + 2018 \cdot S_1 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2018) \cdot S_1.$$

Podľa vzorca, ktorý hovorí, že súčet celých čísel od 1 do n je $n(n+1)/2$ vidíme, že

$$2019\pi = S_1 + S_2 + \cdots + S_{2018} = \frac{2018 \cdot 2019}{2} \cdot S_1 = 1009 \cdot 2019 \cdot S_1.$$

Zároveň ale $S_{1009} = 1009 \cdot S_1$, takže $S_{1009} = \pi$, čiže tento kruh má polomer 1.

Úloha 2.7: Koľko existuje usporiadaných štvoríc (k, l, m, n) kladných celých čísel takých, že $k+l+m+n = 31$?

Výsledok: $\binom{30}{3} = \frac{30!}{27! \cdot 3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$

Riešenie: Na riešenie úlohy zvolíme trochu menej abstraktnú reprezentáciu čísel. Postavme do radu 31 guľôčok, pričom každé dve susedné sú oddelené medzerou. Zvoľme si tri rôzne medzery a vložme do každej z nich prepážku. Počet guľôčok od začiatku radu až po prvú prepážku je číslo k, počet guľôčok od prvej prepážky po druhú prepážku je číslo l, od druhej po tretiu číslo k a od tretej až po koniec radu je n. Všimnime si, že súčet čísel je počet všetkých guľôčok, teda 31. Uvedomme si, že každá usporiadaná štvorica (k, l, m, n), čo je riešením úlohy, vie byť reprezentovaná nejakým vložením prepážok medzi guľôčky. Zároveň, dve usporiadané štvorice sú rovnaké len vtedy, keď majú prepážky vložené na rovnaké pozície. To znamená, že počet vyhovujúcich usporiadaných štvoríc (k, l, m, n) je totožný s počtom spôsobov, ktorými vieme vybrať tri rôzne medzery na vloženie prepážok. Vieme pritom, že medzier v rade je o jednu menej ako počet guľôčok. Riešením je preto hodnota kombinačného čísla $\binom{30}{3}$.

Úloha 2.8: Zistite, aký zvyšok dáva číslo 5^{20} po delení 26.

Výsledok: 1

Riešenie: Platí , že $5^{20} = 25^{10} = 625^5$. Číslo 625 dáva zvyšok 1 po delení 26, teda je tvaru $26k+1$ pre nejaké celé číslo k. Ak budeme číslo tvaru $26k+1$ násobiť samé so sebou, postupným roznásobovaním jednotlivých členov dostaneme výraz, kde každý člen okrem posledného bol aspoň raz vynásobený číslom $26k$. Posledný člen vznikne zo súčinu samých čísel 1. Preto platí, že všetky členy okrem posledného budú deliteľné 26 a výsledná mocnina bude dávať zvyšok 1 po delení 26. Číslo $625^5 = 5^{20}$ dáva teda po delení 26 zvyšok 1.

Úloha 2.9: Aká je hodnota výrazu:

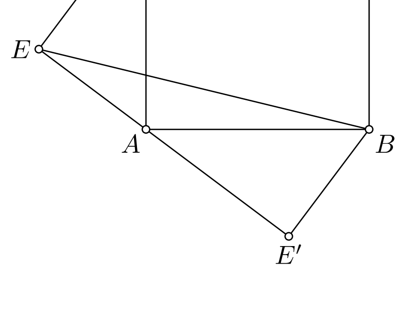
$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots}}}}}?$$

Výsledok: $1+\sqrt{2}$

Riešenie: Označme hľadanú hodnotu ako x. Keďže výraz je nekonečný, môžeme si všimnúť, že pod prvou odmocninou sa opäť skrýva celý tento výraz, presnejšie, že platí $x = \sqrt{1+2x}$. Z toho vidíme, že musí platiť aj $x^2 = 1 + 2x$, čo je kvadratická rovnica s riešeniami $1+\sqrt{2}$ a $1-\sqrt{2}$. Druhé z nich je záporné, takže nemôže byť rovné druhej odmocnine z nejakého čísla. Riešením je teda $1+\sqrt{2}$.

Úloha 2.10: Majme štvorec $ABCD$ a k nemu pripísaný pravouhlý trojuholník ADE, pričom strana AD je prepona a bod E leží mimo štvorca $ABCD$. Vieme, že $|AE| = 6$, $|ED| = 8$. Aká je dĺžka úsečky EB?

Výsledok: $\sqrt{232} = 2\sqrt{58}$



Riešenie využívajúce syntetickú geometriu: Označme $|\sphericalangle ADE| = \alpha$. Trojuholník ADE je pravouhlý, teda $|\sphericalangle DAE| = 90^\circ - \alpha$. Zostrojme bod E' mimo štvorca tak, aby $|AE'| = 8$ a $|BE'| = 6$. Nakoľko $|AD| = |AB|$, trojuholníky AED a $BE'A$ sú zhodné. Navyše platí, že $|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BAE'| = (90^\circ - \alpha) + (90^\circ) + (\alpha) = 180^\circ$, čo znamená, že body E, A a E' ležia na jednej priamke. Z toho vyplýva, že BEE' je pravouhlý trojuholník. Dĺžku $|EB|$ tak určíme z Pytagorovej vety ako: $|EB| = \sqrt{|BE'|^2 + (|AE| + |AE'|)^2} = \sqrt{6^2 + (8+6)^2} = \sqrt{232}$.

Riešenie využívajúce analytickú geometriu: Z Pytagorovej vety vieme, že $|AD|^2 = |AE|^2 + |ED|^2 = 100$, a teda náš štvorec má stranu 10. Zaveďme karteziánsku súradnicovú sústavu s počiatkom $[0, 0]$ v bode

A. Nech má bod B súradnice $[10, 0]$, D nech má $[0, 10]$ a označme súradnice E ako $[x, y]$. Rovnice zo zadania vieme prepísať ako:

$$|AE| = 6 \implies |A - E| = 6 \implies (0 - x)^2 + (0 - y)^2 = x^2 + y^2 = 6^2 \quad (\bigstar)$$
$$|ED| = 8 \implies |E - D| = 8 \implies (x - 0)^2 + (y - 10)^2 = x^2 + (y - 10)^2 = 8^2 \quad (\clubsuit)$$

Úlohou je zistiť hodnotu výrazu: $|EB| = |E-B| = \sqrt{(x-10)^2 + y^2}$. Odčítaním rovnice $(\bigstar)$ od $(\clubsuit)$ dostávame: $(y - 10)^2 - y^2 = 8^2 - 6^2 \implies 100 - 20y = 8^2 - 6^2$, čo je lineárna rovnica s jediným riešením, a to $y = 18/5$. Dosadením do $(\bigstar)$ dostaneme kvadratickú rovnicu s dvoma riešeniami pre x a to $24/5$ a $-24/5$. Vzhľadom na to, že bod E leží mimo štvorca, je hľadaným riešením $x = -24/5$. Ostáva dosadiť do: $|EB| = \sqrt{(x-10)^2 + y^2} = \sqrt{(-24/5 - 10)^2 + (18/5)^2} = \sqrt{232}$.

Úloha 2.11: Majme postupnosť danú vzťahmi: $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$, $a_{3n} = a_n + 1$, $a_{4n} = a_{3n+1} + a_n - 1$. Určte $a_{999999999}$ (index je zložený z deviatich cifier 9).

Výsledok: 5

Riešenie: Číslo 999 999 999 je deliteľné číslom 81. To znamená, že ho vieme 4-krát vydeliť číslom 3. Použitím tretieho vzťahu, $a_{3n} = a_n + 1$, tak dostávame postupne

$$a_{999999999} = a_{333333333} + 1 = (a_{111111111} + 1) + 1 = (a_{37037037} + 1) + 2 = (a_{12345679} + 1) + 3,$$

a teda $a_{999999999} = a_{12345679} + 4$. Ďalej využijeme štvrtý vzťah, $a_{4n} = a_{3n+1} + a_n - 1$. Číslo 12 345 679 dáva po delení číslom 3 zvyšok 1, takže vo vzťahu zastupuje člen a_{3n+1} s $n = 4115226$. Vyjadrením a_{3n+1} a nahradením n dostávame $a_{12345679} = a_{16460904} - a_{4115226} + 1$, celkovo

$$a_{999999999} = a_{16460904} - a_{4115226} + 5.$$

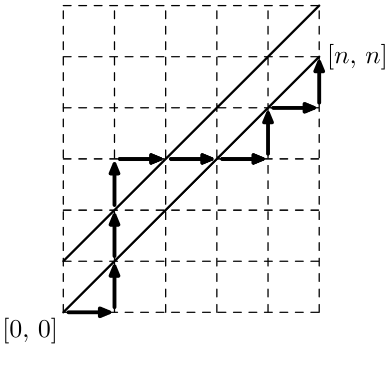
Keďže $16460904 = 4 \cdot 4115226$, tak použitím druhého vzťahu, $a_{2n} = a_n$, vidíme, že odčítavame čísla s rovnakou hodnotou, a preto $a_{999999999} = 5$.

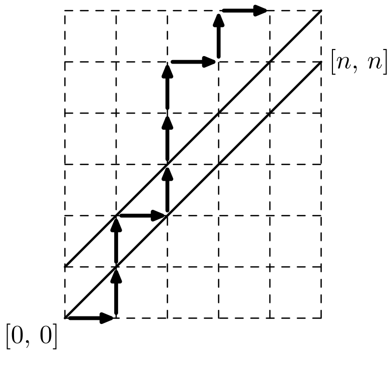
Úloha 2.12: Koľko existuje ciest v štvorčekovej sieti z bodu $[0, 0]$ do bodu $[20, 20]$, ak sa môžeme hýbať len po hranách štvorčekov doprava a hore a nemôžeme sa dostať nad uhlopriečku spájajúcu body $[0, 0]$ a $[20, 20]$?

Výsledok: $\binom{40}{20} - \binom{40}{21} = \binom{40}{20}/21 = \binom{41}{20}/41 = 6564120420$

Riešenie: Pohyb po štvorčekovej sieti sa dá zapísať ako postupnosť šípok $\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow \ldots$, kde $\rightarrow$ predstavuje pohyb doprava a $\uparrow$ pohyb hore. Počet všetkých ciest z $[0, 0]$ do $[n, n]$, vrátane tých, ktoré pretnú uhlopriečku, je $\binom{2n}{n}$ (z $2n$ šípok sme vybrali tých n, ktoré ukazujú doprava). Teraz nám stačí spočítať počet „zlých“ ciest, ciest, ktoré pretnú uhlopriečku, a odpočítať ich od všetkých ciest.

Pozrime sa preto na ľubovoľnú zlú cestu, napríklad na cestu na ľavom obrázku. Táto cesta sa niekedy musí aspoň dotknúť diagonály d spájajúcej body $[0, 1]$ a $[n, n + 1]$. Pozrime sa preto na prvé miesto, kde sa cesta dotkne diagonály d a celý zvyšok cesty preklopíme pozdĺž tejto diagonály (zmeníme šípky smerujúce doprava na šípky smerujúce nahor a naopak). Dostaneme tak situáciu na obrázku vpravo. Nepreklopená časť cesty obsahuje o jednu šípku nahor viac ako je šípok doprava, a keďže zvyšok cesty mal o jednu šípku doprava viac, po preklopení bude mať o jednu šípku nahor viac. Preto celá nová cesta obsahuje o dve šípky nahor viac, a teda skončí v bode $[n - 1, n + 1]$.





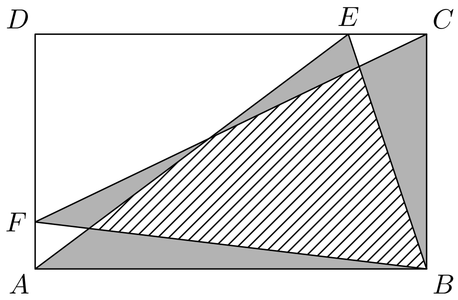
Takto vieme z každej zlej cesty vytvoriť cestu z $[0, 0]$ do $[n - 1, n + 1]$. Funguje to aj naopak, z každej cesty z $[0, 0]$ do $[n-1, n+1]$ vieme vytvoriť zlú cestu rovnakým spôsobom. Máme teda jednoznačné priradenie medzi cestami z $[0,0]$ do $[n-1,n+1]$ a zlými cestami, a preto je ich počet rovnaký. Počet ciest z $[0,0]$ do $[n-1,n+1]$ sa ale spočíta jednoducho, a to ako $\binom{2n}{n+1}$. Teda počet dobrých ciest je $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}$. Pre úplnosť pridáme aj iné tvary výsledku, ktoré sme mohli dostať. Rozpíšme si rozdiel kombinačných čísel pomocou faktoriálov a pozrime sa na to, ako sa tento rozdiel dá ďalej upraviť:

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}=\frac{(2n)!\,(n+1)-(2n)!\,n}{n!\,(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Posledný podiel vieme zapísať ako $\binom{2n}{n}/(n+1)$ alebo ako $\binom{2n+1}{n}/(2n+1)$. Dosadením $n=20$ dostaneme, že počet možností je 6564120420.

3. časť

<u>Úloha 3.1:</u> Na obrázku je znázornený obdĺžnik $ABCD$ s obsahom 1 a body E, F postupne na stranách CD, AD také, že obsah vyšrafovanej časti je 0,42. Aký obsah má sivá časť?



Výsledok: 0,16

Riešenie: Trojuholník ABE má polovičný obsah oproti obdĺžniku $ABCD$, teda 0,5, rovnako tak aj BCF. Obsah sivej časti trojuholníka ABE je preto 0,5 mínus obsah vyšrafovanej časti, teda $0{,}5-0{,}42=0{,}08$. Rovnako aj sivá časť trojuholníka BCF má obsah $0{,}5-0{,}42=0{,}08$. Spolu je teda obsah sivej časti $0{,}08+0{,}08=0{,}16$.

<u>Úloha 3.2:</u> Nájdite všetky také prirodzené dvojciferné čísla, pre ktoré platí, že sú rovné súčtu svojej číslice na mieste desiatok a druhej mocniny svojej číslice na mieste jednotiek.

Výsledok: 89

Riešenie: Označme si hľadané číslo ako $\overline{AB}$. Potom musí platiť vzťah $\overline{AB}=A+B^2$. Číslo $\overline{AB}$ si vieme zapísať ako $10A+B$. Celkovo teda platí:

$$\begin{aligned}10A+B&=A+B^2,\\ 9A&=B^2-B,\\ 9A&=B(B-1).\end{aligned}$$

Ľavá strana rovnice je deliteľná 9, potrebujeme teda, aby aj výraz $B(B-1)$ bol deliteľný 9. Keďže sa jedná o súčin dvoch po sebe idúcich jednociferných čísel (keďže B je cifra), tak nutne musí platiť $B=9$. Odtiaľ dostávame, že $9A=9\cdot 8$, a teda vieme, že $A=8$. Jediné vyhovujúce číslo je tým pádom 89.

<u>Úloha 3.3:</u> Platí, že každé z čísel a, b, c je náhodne vybrané z množiny $\{1,2,3,4,5\}$. Aká je pravdepodobnosť, že číslo $ab+c$ je nepárne? Výsledok zadajte ako zlomok v základnom tvare.

Výsledok: 66/125

Riešenie: Číslo $ab+c$ je nepárne, ak ab je párne a c nepárne alebo naopak. Najprv sa budeme zaoberať prvou možnosťou. Párne ab vieme získať v prípadoch:

- párne a a nepárne b,
- nepárne a a párne b,
- párne a a párne b.

Spolu nám to dáva $6 + 6 + 4 = 16$ možností pre párne ab. To ešte musíme vynásobiť počtom možností pre nepárne c, čo je 3. To znamená, že $ab + c$ je nepárne (pri párnom ab a nepárnom c) v $16 \cdot 3 = 48$ prípadoch.

Teraz nám už len zostáva zistiť, koľko možností máme pre nepárne ab a párne c. Na to musí byť a aj b nepárne a c párne, čo znamená, že máme dokopy $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ možností.

Spolu tak máme $48 + 18 = 66$ možností pre nepárne $ab + c$. Keďže nás zaujíma pravdepodobnosť, tak to ešte musíme vydeliť celkovým počtom možností, ktorých je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Výsledná pravdepodobnosť je teda $66/125$.

Úloha 3.4: Nech a je celé číslo a p je prvočíslo také, že je splnená rovnosť $p + 400 = a^2$. Aký je súčet všetkých možných hodnôt, ktoré môže prvočíslo p nadobúdať?

Výsledok: 41

Riešenie: Vieme, že $a^2 = (-a)^2$, a preto sa nám stačí pozerať na nezáporné hodnoty a. Rovnicu vieme upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned} p + 400 &= a^2 \\ p &= a^2 - 400 \\ p &= a^2 - 20^2 \\ p &= (a - 20)(a + 20). \end{aligned}$$

Keďže prvočíslo je kladné a deliteľné iba jednotkou a samým sebou, tak $a - 20 = 1$ a $a + 20 = p$, a teda $a = 21$ a $p = 41$.

Úloha 3.5: Majme čierny rovnostranný trojuholník. V jednom kroku rozdelíme všetky trojuholníky na 4 zhodné rovnostranné trojuholníky a prefarbíme stredný trojuholník – ak bol ten pôvodný čierny, tak stred bude biely a naopak. Aký bude počet bielych trojuholníkov po šiestom kroku?

Výsledok: 2016

Riešenie: Označme si počet bielych trojuholníkov na začiatku kroku ako b a počet čiernych trojuholníkov na začiatku kroku ako c. Ďalej si označme počet bielych trojuholníkov na konci kroku ako B a počet čiernych trojuholníkov na konci kroku ako C. V jednom kroku sa z každého b stane jeden C a tri B a z každého c sa stane jeden B a tri C. Zapísané v rovniciach:

$$\begin{aligned} B &= 3b + c, \\ C &= 3c + b. \end{aligned}$$

Poznáme teda už vzorec na výpočet B a C, ostáva už iba vytvoriť tabuľku pre prvých 6 krokov:

Krok	b (pred krokom)	c (pred krokom)	B (po kroku)	C (po kroku)
1	0	1	1	3
2	1	3	6	10
3	6	10	28	36
4	28	36	120	136
5	120	136	496	528
6	496	528	2016	2080

Počet bielych trojuholníkov po šiestom kroku bude teda 2016.

Úloha 3.6: Aké je najväčšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá zapísať v tvare $42a + b$, kde a, b sú kladné celé čísla a navyše b je zložené číslo? (Číslo nazývame zloženým, ak sa dá zapísať ako súčin dvoch prirodzených čísel väčších ako 1.)

Výsledok: 215

Riešenie: Hľadané číslo si označme n. Predpokladajme, že je väčšie ako 210 (42 sa doň zmestí aspoň 5 krát). To znamená, že sa toto číslo dá zapísať ako $42 \cdot 1 + (n - 42)$, $42 \cdot 2 + (n - 84)$, $42 \cdot 3 + (n - 126)$, $42 \cdot 4 + (n - 168)$, $42 \cdot 5 + (n - 210)$. Zo zadania vieme, že hľadáme také čo najväčšie číslo, kde b nebude zložené, a teda každé z čísel $n - 42$, $n - 84$, $n - 126$, $n - 168$, $n - 210$ nesmie byť zložené číslo.

Ak sa pozrieme na zvyšky týchto čísel po delení piatimi, tak si všimneme, že sú rôzne (postupne: $n - 2$, $n - 4$, $n - 1$, $n - 3$, n). Vidíme, že práve jedno z týchto čísel musí byť deliteľné piatimi. Keďže jediné prvočíslo deliteľné piatimi je 5, tak jedno zo spomínaných zápisov b bude 5 a bude to to najmenšie, teda $n-210$. Tomu zodpovedá číslo $n = 215$. Po dosadení ľahko overíme, že všetky tieto čísla (173, 131, 89, 47, 5) sú prvočísla, a teda naozaj hľadané číslo je 215.

Tu je nutné si uvedomiť, že sme ukázali, že každé číslo väčšie ako 210 sa dá zapísať takýmito piatimi spôsobmi, kde pre jeden zo spôsobov je b deliteľné piatimi. Preto sa dá každé číslo väčšie ako 210, rôzne od čísla 215, zapísať v tvare $42a + b$, kde b je zložené číslo deliteľné piatimi.

Úloha 3.7: Nájdite všetky reálne čísla a také, že rovnica

$$a = |x - |x - |x - 4|||$$

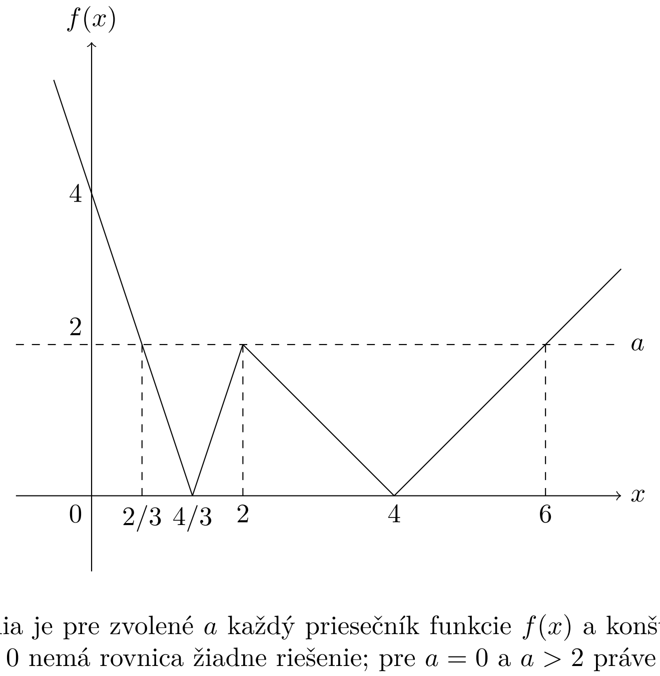
má práve tri riešenia pre reálnu neznámu x.

Výsledok: a = 2

Riešenie: Úlohu budeme riešiť graficky, a to tak, že si do grafu vykreslíme funkciu $f(x) = |x - |x - |x - 4|||$. Na to, aby sme získali jej predpis, rozoberieme niekoľko prípadov:

1. $x \geq 4$: pre všetky také čísla platí, že $|x - 4| = x - 4$, teda $f(x)$ vieme pre všetky $x \geq 4$ prepísať ako: $f(x) = |x - |x - (x - 4)|| = |x - |4|| = |x - 4| = x - 4$.
2. $x < 4$: platí $|x - 4| = -(x - 4)$, teda $f(x)$ vieme pre všetky čísla $x < 4$ prepísať ako: $f(x) = |x - |x - (-(x - 4))|| = |x - |2x - 4||$. Rozoberme ďalšie dva prípady:
   (a) $2 \leq x < 4$: platí $|2x-4| = 2x-4$, teda $f(x)$ vieme pre tieto čísla prepísať ako: $f(x) = |x-(2x-4)| = |4 - x| = 4 - x$.
   (b) $x < 2$: platí $|2x - 4| = -(2x - 4)$, teda $f(x)$ vieme pre tieto čísla prepísať ako: $f(x) = |x - (-(2x - 4))| = |3x - 4|$. Rozoberme ďalšie dva prípady:
      i. $4/3 < x < 2$: platí $|3x - 4| = 3x - 4$, teda $f(x)$ vieme pre tieto čísla prepísať ako: $f(x) = 3x - 4$.
      ii. $x \leq 4/3$: platí $|3x - 4| = -(3x - 4)$, teda $f(x)$ vieme pre tieto čísla prepísať ako: $f(x) = 4 - 3x$.

Keď vykreslíme funkciu $f(x)$ po častiach na jednotlivých intervaloch podľa získaných predpisov dostaneme graf:



Riešením rovnice zo zadania je pre zvolené a každý priesečník funkcie $f(x)$ a konštantnej funkcie a. Na grafe môžeme vidieť, že pre $a < 0$ nemá rovnica žiadne riešenie; pre $a = 0$ a $a > 2$ práve dve riešenia; pre $0 < 2 < a$ práve štyri riešenia. Práve tri riešenia má rovnica len pre $a = 2$ a sú to $x \in \{2/3, 2, 6\}$.

Úloha 3.8: Nájdite všetky usporiadané dvojice kladných celých čísel (a, b) také, že $a! + 4! = b^2$.

Výsledok: $(1, 5)$, $(5, 12)$

Riešenie: Ak za a dosadíme postupne celé čísla $1 \leq a \leq 5$ a vyjadríme b, dostaneme dve riešenia, a to (1,5) a (5,12). Teraz ukážeme, že iné riešenie neexistuje. Pre $a \geq 6$ platí, že $a! = (2k) \cdot 4!$, kde $k \in \mathrm{N}$. Potom ale:

$a! + 4! = (2k) \cdot 4! + 4! = 4! \cdot (2k+1) = 2^3 \cdot 3 \cdot (2k+1) = b^2$. Pre $a \geq 6$ má výraz $a! + 4!$ v prvočíselnom rozklade dvojku v tretej mocnine a súčin dvoch nepárnych čísel, teda nemôže byť štvorcom žiadneho kladného celého čísla – nutnou podmienkou toho, aby bolo číslo štvorec je totiž to, že každé prvočíslo musí mať v rozklade párny exponent. V opačnom prípade by b nebolo celé, čo by bol spor so zadaním.

Úloha 3.9: Koľkými spôsobmi vieme vyplatiť sumu 2018 eur, ak máme k dispozícii neobmedzený počet 10, 5 eurových bankoviek a 1 eurových mincí?

Výsledok: $\binom{203}{2} \cdot 2 = 203 \cdot 202 = 41006$

Riešenie: Rozdeľme si riešenie na dva prípady v závislosti od toho, či použijeme párny, alebo nepárny počet 5-eurových bankoviek.

V prípade, že použijeme párny počet 5-eurových bankoviek, môžeme tieto bankovky spárovať a každý pár bude mať hodnotu 10 eur. Bankovky s hodnotami 10 a 5 sa nám preto sčítajú do sumy deliteľnej desiatimi. Preto pri vyplácaní posledných 8 eur nemáme na výber a musíme ich vyplatiť pomocou 1-eurových mincí. Zvyšných 2010 eur si rozdelíme na skupiny po 10 eur, kde niektoré zo skupín budú vyplatené pomocou 10-eurových bankoviek, niektoré pomocou 5-eurových bankoviek a niektoré pomocou 1-eurových mincí. Týchto skupín máme 201 a rozdelíme ich pomocou 2 oddeľovačov. Jedno konkrétne rozdelenie sa nachádza na nasledujúcom obrázku.

$$\boxed{10} \ \cdots \ \boxed{10} \ \Big| \ \boxed{2 \cdot 5} \ \cdots \ \boxed{2 \cdot 5} \ \Big| \ \boxed{10 \cdot 1} \ \cdots \ \boxed{10 \cdot 1}$$

Počet rozdelení dostaneme jednoducho tak, že všetkých 201 10-eurových skupín nahradíme hviezdičkami, pridáme 2 hviezdičky navyše pre oddeľovače a zo všetkých 203 hviezdičiek vyberieme 2, ktoré budú predstavovať oddeľovače. Na výber oddeľovačov máme $\binom{203}{2}$ možností a každá možnosť nám dá jeden konkrétny spôsob zaplatenia 2018 eur.

V prípade, že použijeme nepárny počet bankoviek s hodnotou 5 eur, môžeme opäť vyriešiť posledných 8 eur a to tak, že ich zaplatíme pomocou troch 1-eurových mincí a jednej 5-eurovej bankovky. Potom nám ale ostane párny počet bankoviek s hodnotou 5 eur a môžeme použiť úvahu z predchádzajúceho prípadu. Opäť rozdelíme zvyšných 2010 eur na skupiny po 10 eur a každých 10 eur zaplatíme pomocou jednej 10-eurovej bankovky, dvoch 5-eurových bankoviek alebo desiatich 1-eurových mincí. Na to máme $\binom{203}{2}$ možností ako sme už ukázali v prvej časti.

Preto máme spolu $2 \cdot \binom{203}{2}$ možností na vyplatenie 2018 eur.

Úloha 3.10: Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (a, b), pre ktoré platí $a \leq b$ a $a^2 + b^2 = 2018$.

Výsledok: $(a, b) = (13, 43)$

Riešenie: Najskôr sa pozrime, aké hodnoty môžu neznáme a a b nadobúdať. Číslo $45^2 = 2025$ je väčšie ako 2018, a preto a a b musia byť menšie ako 45. Ďalej sa pokúsime vylúčiť ďalšie hodnoty. Číslo 2018 je párne, čiže a a b musia mať rovnakú paritu. Ak by však a aj b boli párne čísla, súčet $a^2 + b^2$ by bol deliteľný štvorkou, zatiaľ čo $2018 = 2 \cdot 1009$ štvorkou deliteľné nie je a teda a a b sú nepárne čísla.

Ďalej sa pozrime na to, aká cifra môže byť na mieste jednotiek čísel a a b.

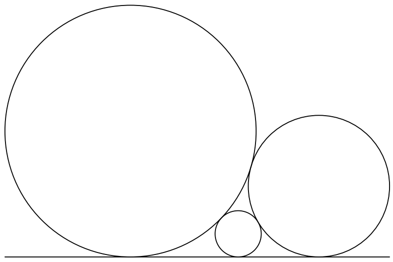
Posledná cifra a	1	3	5	7	9
Posledná cifra a^2	1	9	5	9	1

Teraz si môžeme všimnúť, že sčítaním dvoch druhých mocnín môžeme dostať cifru 8 na mieste jednotiek len tak, že čísla a a b končia cifrou 3 alebo 7. Preto si skúsme vypísať druhé mocniny čísel končiacich na 3 alebo 7 a zistiť, ktoré z nich vyhovujú zadaniu.

a	3	7	13	17	23	27	33	37	43
a^2	9	49	169	289	529	729	1089	1369	1849
$b^2 = 2018 - a^2$	~~2009~~	~~1969~~	1849	~~1729~~	~~1489~~	~~1289~~	~~929~~	~~649~~	169
b	-	-	43	-	-	-	-	-	13

Za predpokladu $a \leq b$ vidíme, že riešením je len jedna dvojica (a, b) v tvare $(13, 43)$.

Úloha 3.11: Máme tri kružnice rôznych veľkostí, ktoré sa po dvojiciach dotýkajú a majú spoločnú dotyčnicu, ako je to znázornené na obrázku. Polomer najväčšej z nich je 16 a polomer strednej je 9. Aký polomer má najmenšia kružnica?



Výsledok: $(12/7)^2 = 144/49$

Riešenie: Nech S_1, S_2 a S_3 sú stredy kružníc (od najväčšej po najmenšiu) a body A, B, C sú postupne ich dotykové body k spoločnej dotyčnici. Ďalej nech S je priesečník priamok S_1S_2 a AB, ako je to na nasledujúcom obrázku vľavo. Prvým krokom bude vypočítať veľkosť úsečky AB. Trojuholníky SAS_1 a SBS_2 majú zhodné uhly, a preto sú podobné. Z ich podobnosti vieme dostať, že

$$\frac{|SS_1|}{|SS_2|} = \frac{16+9+|SS_2|}{|SS_2|} = \frac{16}{9} = \frac{|AS_1|}{|BS_2|}.$$

Z prostredných dvoch výrazov dostaneme

$$\begin{aligned} 9\cdot(16+9+|SS_2|) &= 16|SS_2| \\ 7|SS_2| &= 9\cdot 25, \end{aligned}$$

a teda $|SS_2| = (25\cdot 9)/7$. Ďalej vieme, že trojuholník SBS_2 je pravouhlý a z Pytagorovej vety dostaneme

$$|SB| = \sqrt{|SS_2|^2 - |BS_2|^2} = \sqrt{\frac{9^2}{7^2}\left(25^2-7^2\right)} = \frac{9\cdot 24}{7}.$$

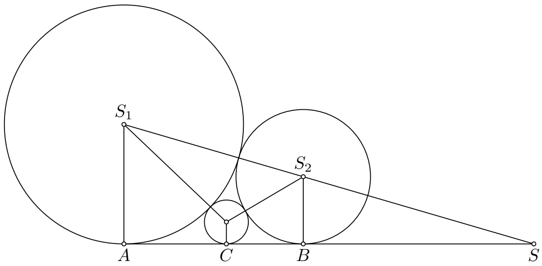
Opäť využijeme podobnosť trojuholníkov SAS_1 a SBS_2 na vyjadrenie pomeru veľkostí strán

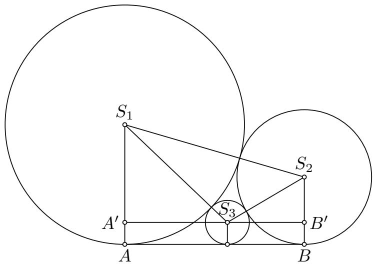
$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|AB|+|SB|}{|SB|} = \frac{|AB|+(9\cdot 24)/7}{(9\cdot 24)/7} = \frac{16}{9} = \frac{|AS_1|}{|BS_2|}.$$

Z tretieho a štvrtého výrazu po prenásobení menovateľmi dostaneme

$$\begin{aligned} 7|AB| + 9\cdot 24 &= 24\cdot 16 \\ 7|AB| &= 7\cdot 24, \end{aligned}$$

z čoho dostaneme $|AB| = 24$.





V ďalšom kroku si skúsime vyjadriť veľkosť úsečky AB iným spôsobom. Označme si polomer najmenšej kružnice písmenom r a zostrojme rovnobežku s AB cez bod S_3, ako je to znázornené na obrázku vpravo. Označme priesečníky rovnobežky s úsečkami AS_1 a BS_2 postupne A' a B'. Úsečky AB a $A'B'$ majú rovnakú veľkosť. Trojuholník $A'S_3S_1$ je pravouhlý s preponou S_1S_3 veľkosti $16+r$ a odvesnou $A'S_1$ veľkosti $16-r$. Preto použitím Pytagorovej vety dostaneme, že $|A'S_3| = 8\sqrt{r}$. Rovnakým spôsobom z trojuholníku $B'S_3S_2$ dostaneme, že $|B'S_3| = 6\sqrt{r}$. Vieme už, že veľkosť $A'B'$ je 24, a preto dostávame

$$24 = |A'B'| = |A'S_3| + |B'S_3| = 8\sqrt{r} + 6\sqrt{r} = 14\sqrt{r},$$

a teda $r = (12/7)^2 = 144/49$.

Úloha 3.12: Nech korene polynómu $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ sú reálne čísla a, b, c a korene polynómu $x^3 + rx^2 + sx + t$ sú $a + b$, $b + c$, $c + a$. Nájdite hodnotu t.

Výsledok: 23

Riešenie: Jednou zo základných vlastností polynómov je rozklad na koreňové činitele. Každý polynóm n-tého stupňa $Q(x)$ je možné zapísať ako: $Q(x) = (x - q_1)(x - q_2)\ldots(x - q_n)$, kde q_1, ..., q_n sú korene polynómu $Q(x)$. Keď uplatníme rozklad na dva polynómy zo zadania tak máme:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 4x - 11 &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ x^3 + rx^2 + sx + t &= (x - a - b)(x - b - c)(x - c - a), \end{aligned}$$

Roznásobením oboch pravých strán máme:

$$\begin{aligned} (x - a)(x - b)(x - c) &= x^3 + (-a - b - c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc, \\ (x - a - b)(x - b - c)(x - c - a) &= x^3 + (-2a - 2b - 2c)x^2 + (3ab + 3bc + 3ca + a^2 + b^2 + c^2)x - \\ &\quad - (a + b)(b + c)(c + a). \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov pri jednotlivých členoch s mocninami x roznásobenej pravej strany s polynómom $P(x)$ zo zadania dostávame:

$$\begin{aligned} 3x^2 = (-a - b - c)x^2 &\implies 3 = -a - b - c \\ 4x = (ab + bc + ca)x &\implies 4 = ab + bc + ca \\ -11 = -abc &\implies 11 = abc \end{aligned}$$

Z úpravy druhého polynómu tiež vidíme, že $t = -(a + b)(b + c)(c + a)$. Ostáva si uvedomiť, že tento výraz je možné upraviť ako:

$$t = -(a + b)(b + c)(c + a) = abc - (a + b + c)(ab + bc + ca) = 11 - (-3) \cdot 4 = 23.$$

autori:	Jakub Genči, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš,Zuzana Ontkovičová, Žaneta Semanišinová, Roman Staňo
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Matúš Hlaváčik, Tomáš Kocák
názov:	**Košický MATBOJ – 26. 10. 2018**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
www:	https://seminar.strom.sk/sk/matboj/ http://itakademia.sk/

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk