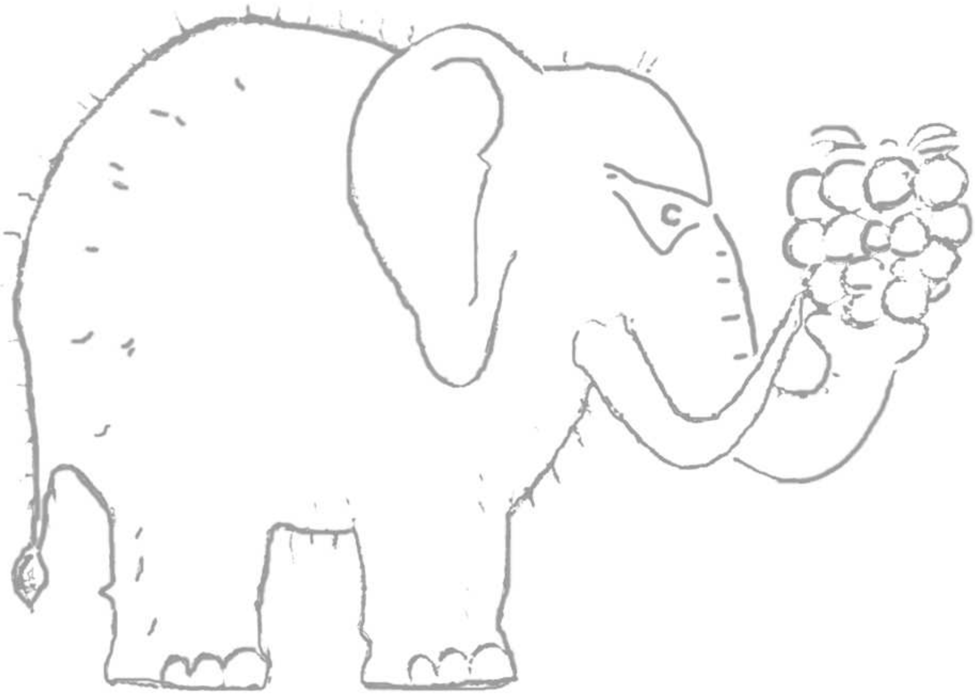


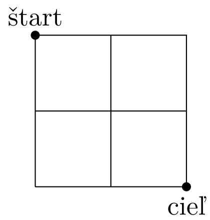
MAMUT
2018

Ľahké 1. Dané je deväťciferné číslo 297 835 168. Prečiarknite v ňom tri číslice tak, aby vzniknuté šesťciferné číslo bolo najväčšie možné.

Výsledok. 985 168; vyškrtneme 2, 7 a 3

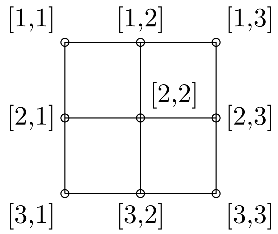
Riešenie. Po vyškrtnutí práve troch cifier vznikne číslo šesťciferné. Skúsme preto na pozíciu stotisícok (prvú pozíciu) dostať čo najväčšiu cifru. Najväčšia cifra v pôvodnom čísle je 9 a vyškrtnutím cifry 2 ju na želané miesto skutočne vieme dostať (dostávame tak číslo 97 835 168). Uvedomme si teraz, že na pozícii desaťtisícok vyškrtnutého čísla môžu byť len cifry 7, 8 a 3. Ak by sme tam totiž chceli dostať inú, museli by sme vyškrtnúť zo zvyšku čísla viac ako len dve cifry. Vznikajúce číslo bude najväčšie vtedy, ak na miesto desaťtisícok dostaneme cifru 8, a teda vyškrtneme 7 (zatiaľ tak máme 9 835 168). Ostáva nám vyškrtnúť poslednú číslicu. Ak by sme vyškrtli číslicu 3, dostali by sme číslo 985 168. Všimnime si, že vzniknuté číslo má na pozícii tisícok cifru 5. Ak by sme namiesto 3 vyškrtli ako poslednú niektorú nasledujúcu cifru, dostali by sme číslo, ktoré má na pozícii tisícok cifru 3, a teda je určite menšie ako 985 168. Najväčšie možné číslo (985 168) preto dostávame vyškrtnutím cifier 2, 7 a 3.

Ľahké 2. Na obrázku je štvorcová sieť rozmeru 2×2. Vieme sa po nej pohybovať, ale len po stranách a to len v smeroch dole a doprava. Koľkými spôsobmi sa vieme dostať zo štartu do cieľa?



Výsledok. 6

Riešenie.



Body mriežky si označme ako na obrázku. Do bodu [1, 2] sa vieme dostať len jedným spôsobom, rovnako ako aj do bodu [2, 1]. Do bodu [2, 2] sa vieme dostať len z týchto dvoch bodov [1, 2] a [2, 1], a teda sú 2 možnosti. Rovnako postupujeme ďalej. Do bodu [1, 3] sa vieme dostať iba z [1, 2], teda 1 spôsobom. Do bodu [2, 3] sa vieme dostať z [1, 3] a z [2, 2]. Teda máme $1 + 2 = 3$ možnosti. Do bodu [3, 1] sa vieme dostať z [2, 1], teda len 1 spôsobom. Do bodu [3, 2] sa vieme dostať z [3, 1] a z [2, 2], teda $1 + 2 = 3$ spôsobmi. Do bodu [3, 3] sa vieme dostať z [3, 2] a z [2, 3], teda $3 + 3 = 6$ spôsobmi.

Ľahké 3. Päť kamarátov si hodilo hracou kockou a každému padlo iné číslo. Mišo hodil dvakrát viac ako Robo, Tomáš dokonca trikrát viac ako Robo. Paťovi padlo trikrát viac ako Maťovi. Ktoré číslo nehodil žiaden z chlapcov? Hracia kocka obsahuje čísla $1, 2, 3, 4, 5 a 6$.

Výsledok. 5

Riešenie. Robovi muselo padnúť číslo 1 alebo 2. Ak by totiž Robovi padlo viac, Tomášovi (ktorému padlo trikrát viac ako Robovi) by muselo padnúť číslo väčšie ako 6, čo ale nie je možné. Rovnaká situácia nastáva aj s Maťom a Paťom (Maťo musel tiež hodiť 1 alebo 2). Jeden z dvojice Robo a Maťo teda hodil 1 a druhý 2 (rovnaké číslo im zo zadania padnúť nemohlo). Rozoberme tieto dve možnosti:

1. Robovi padlo 1 a Maťovi 2. To ale znamená, že Mišovi padlo 2 (dvojnásobok Robovho čísla), čo je číslo rovnaké, ako padlo Maťovi. To sa však podľa zadania nemôže stať. Táto možnosť preto nevedie k riešeniu.

2. Robovi padlo 2 a Matovi 1. Mišovi potom muselo padnúť 4, Tomášovi 6 a Paťovi 3. Táto možnosť vyhovuje zadaniu a dostávame riešenie – nikomu nepadlo číslo 5.

Ľahké 4. Traja kamaráti sa rozprávajú o tom, koľko koláčov zjedli (zjedli aspoň jeden). Na základe ich vyhlásení rozhodnite, koľko to bolo. Pravdu ale hovorí len jedno z detí.

- Mišo: „Zjedli sme aspoň šestnásť koláčov."
- Robo: „Zjedli sme najviac štrnásť koláčov."
- Tomáš: „Zjedli sme jeden koláč alebo viac."

Výsledok. 15

Riešenie. Tomáš hovorí pravdu vždy, bez ohľadu na počet koláčov, čo zjedli, nakoľko tvrdí, že zjedli aspoň jeden. To potom znamená, že Mišo klame, a teda koláčov nebolo aspoň šestnásť, takže ich bolo najviac pätnásť. Robo musí tiež klamať, a ak tvrdí, že koláčov bolo najviac štrnásť, musí ich v skutočnosti byť aspoň pätnásť. Koláčov teda bolo aspoň pätnásť a zároveň najviac pätnásť. Dostávame tak jediné riešenie, pre ktoré vieme ľahko overiť platnosť tvrdení – pätnásť koláčov.

Ľahké 5. Zistite počet všetkých párnych trojciferných čísel, ktoré sa dajú zostaviť z číslic 1, 2, 3, 4, pričom sa číslice v čísle môžu opakovať.

Výsledok. 32

Riešenie. Na miesto stoviek a desiatok môžeme dať ktorúkoľvek číslicu. Máme 4 možnosti pre číslicu na mieste stoviek a pre každú takúto možnosť máme 4 ďalšie možnosti pre číslicu na mieste desiatok. Z toho dostávame $4 \cdot 4 = 16$ možností, ktorými vieme vybrať prvé dvojčíslie trojciferného čísla. Na miesto jednotiek však už nemôžeme dať ľubovoľnú cifru – trojciferné číslo musí byť párne, takže do úvahy prichádzajú ako posledné cifry len 2 a 4. Ku každej zo 16 možností prvého dvojčíslia máme 2 možnosti pre cifru na mieste jednotiek. Výsledný počet možností je preto $16 \cdot 2 = 32$.

Ľahké 6. Peťo si vymyslel trojciferné číslo a vyzval svojich štyroch kamošov, aby skúsili uhádnuť aké. Všetky tipy boli rôzne, a to: 570, 248, 549 a 578. Ani jednému z kamarátov sa nepodarilo uhádnuť presné číslo, ale každý uhádol práve jednu cifru a navyše presne na svojom mieste. Z týchto informácií už je možné určiť Peťove vymyslené číslo. Zistite, aké číslo to je.

Výsledok. 279

Riešenie. Keďže zo zadaných informácií vieme presne určiť hľadané číslo, môže hľadané číslo obsahovať len také cifry, čo na danom mieste tipli Peťovi kamaráti. Prvá cifra teda bude 5 alebo 2. Ak by bola prvá cifra 5, trafili by sa až traja Peťovi kamaráti. Potom by sme však vedeli len to, že druhý Peťov kamarát ešte trafil jednu cifru na správnom mieste, no to nám nedostačuje na určenie správneho čísla. Preto musí byť prvá cifra 2. Z toho ďalej vyplýva, že na druhom mieste nie je cifra 4, čiže tam musí byť cifra 7. V takom prípade sa ani do jednej z prvých dvoch cifier netrafil iba jeden Peťov kamarát. Aby tento kamarát trafil aspoň jednu cifru, musí byť posledná cifra 9.

Ľahké 7. Naše psy majú nôh o 18 viac ako nosov. Koľko máme psov?

Výsledok. 6

Riešenie. Každý pes má 4 nohy a 1 nos. Jeden pes má teda o 3 nohy viac ako má nosov. Dvaja psi preto majú o $2 \cdot 3 = 6$ nôh viac ako nosov. Tri psi majú o $3 \cdot 3 = 9$ nôh viac ako nosov a tak ďalej. Ostáva nám teda nájsť také číslo, ktorého trojnásobok je 18. Ľahko zistíme, že psov je 6, čo vieme overiť vykonaním skúšky.

Ľahké 8. Nájdite najväčšie štvorciferné číslo, ktoré má všetky nasledujúce vlastnosti:

- je nepárne,
- jeho ciferný súčet je 16,
- všetky jeho cifry sú navzájom rôzne,
- cifra na mieste tisícok je o 2 väčšia ako cifra na mieste jednotiek.

Výsledok. 7405

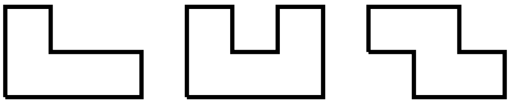
Riešenie. Hľadáme čo najväčšie číslo, skúsme preto dať na miesto tisícok čo najväčšiu cifru a to 9. Na mieste jednotiek potom musí byť 7. Ciferný súčet však musí byť 16, čo znamená, že na mieste desiatok aj stoviek musí byť 0. To ale znamená opakujúce sa cifry a číslica 9 na začiatku čísla preto nevedie k riešeniu, ale k sporu.
Skúsme preto dať na pozíciu tisícok cifru 8. Na pozícii jednotiek musí byť potom 6. Také číslo ale nie je nepárne a cifra 8 na začiatku preto tiež nebola správna voľba.
Pokračujme tým, že na pozíciu tisícok dáme 7. Na mieste jednotiek musí byť 5. Súčet týchto dvoch cifier je $7+5 = 12$, a teda číslice na mieste stoviek a desiatok musia dávať dokopy 4, aby bol celkový ciferný súčet 16. Na miesto stoviek preto dáme číslicu 4 a dostávame číslo 7405. Toto číslo vyhovuje všetkým podmienkam zo zadania a zároveň je najväčšie možné.

Ľahké 9. Pankrác, Servác a Bonifác pracujú v továrni. Každý deň od pondelka do piatka (vrátane) sú v práci vždy práve dvaja z nich. Pankrác pracuje tri dni v týždni, Servác štyri. Koľko dní v týždni pracuje Bonifác?

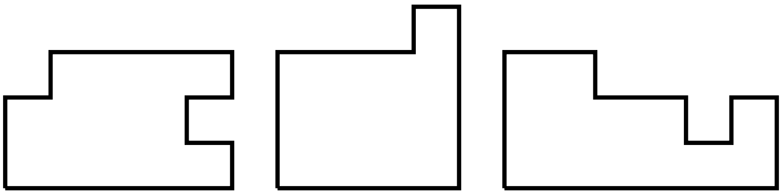
Výsledok. 3

Riešenie. Pracuje sa spolu 5 dní. Predstavme si, že každý deň si na papier napíšeme čiarku za každého pracovníka. Po celom týždni budeme mať na papieri $5 \cdot 2 = 10$ čiarok, pretože každý deň sú pracovníci dvaja. Vieme, že 3 čiarky z toho sme poznačili za Pankráca a 4 čiarky za Serváca. Bonifác preto odpracoval $10 - 3 - 4 = 3$ dni.

Ľahké 10. Máte k dispozícií tieto tri kúsky skladačky:

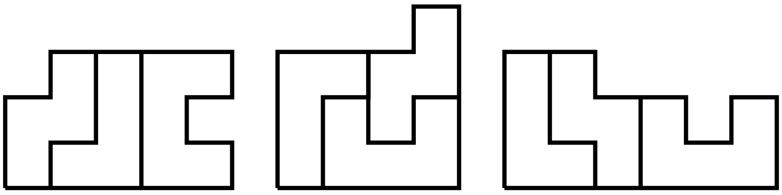


Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich útvarov je možné zo skladačky poskladať, ak musíte použiť všetky tri dieliky, ktoré môžete ľubovoľne otáčať a prevracať. Ak niektorý z útvarov nie je možné poskladať, vysvetlite prečo.



Výsledok. Všetky útvary je možné poskladať.

Riešenie. Stačí nám zapojiť predstavivosť a ľahko nájdeme:



Ľahké 11. Matúš vzal papier a rozstrihal ho na 7 ústrižkov. Potom vzal jeden zo siedmich ústrižkov a rozstrihal ho na 7 ďalších ústrižkov. Následne vzal jeden z nových ústrižkov a rozstrihal ho na ďalších 7. Takto pokračoval v strihaní ďalej a to až do bodu, kedy mal ústrižkov najvyšší možný počet menší ako 100. Koľko ústrižkov Matúš mal?

Výsledok. 97

Riešenie. Všimnime si, že vždy keď Matúš rozstrihne nejaký ústrižok, ich celkový počet sa zväčší o 6 (dostane síce 7 nových, no 1 rozstrihá). Keďže na začiatku máme ústrižkov 7, výsledný počet ústrižkov je nejaký násobok 6 zväčšený o 7. Skúsme preto nájsť najmenší násobok 6 menší ako 100. Takým je 96, v tomto prípade by však Matúš mal $96 + 7 = 103$ ústrižkov, čo je príliš veľa. Skončiť preto musel ešte predtým. Vezmime predchádzajúci násobok 6 teda 90. V tomto prípade dostávame pre počet Matúšových ústrižkov $90 + 7 = 97$, čo už vyhovuje.

Ľahké 12. Kocku rozmerov $4 \times 4 \times 4$ zafarbíme na červeno a rozrežeme na 64 kociek rozmerov $1 \times 1 \times 1$, ktoré nazveme *jednotkové.* Koľko jednotkových kociek má práve dve červené steny?

Výsledok. 24

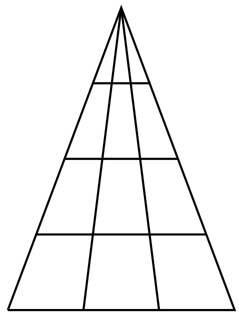
Riešenie. Kocka s dvomi zafarbenými stenami sa musí v pôvodnej $4 \times 4 \times 4$ kocke nachádzať na takom mieste, že jej je vidno práve dve steny. Takú pozíciu majú len kocky, ktoré ležia na hrane kocky. Hrana kocky leží až na štyroch kockách – dvoch „rohových" a dvoch „hranových" medzi nimi. Rohovej kocke ale vidno až 3 steny, zatiaľ čo hranovej 2. Kocka má 12 hrán a žiadne dve hrany nemajú spoločné hranové kocky, výsledok je preto $12 \cdot 2 = 24$.

Ľahké 13. Vo výklade obchodu sú jednokolky, bicykle a trojkolky, z každého druhu aspoň jeden kus. Spolu majú 7 sedadiel a 13 kolies. Bicyklov je viac ako trojkoliek. Koľko je jednokoliek?

Výsledok. 2

Riešenie. Každý druh má len jedno sedadlo, preto je vo výklade sedem vecí. Z každého druhu je aspoň jeden kus, no bicyklov je viac ako trojkoliek, preto musia byť minimálne dva. Už vieme priradiť štyri sedadlá a osem kolies. Ešte potrebujeme zistiť čomu patrí zvyšných päť kolies a tri sedadlá. Trojkolku už pridať nemôžeme, lebo by sme museli pridať aj ďalší bicykel. To by pridalo päť kolies, no iba dve sedadlá. Preto zvyšok výkladu tvoria dva bicykle a jedna jednokolka. Vo výklade sú dve jednokolky.

Ľahké 14. Zistite, koľko trojuholníkov sa nachádza na obrázku.



Výsledok. 24

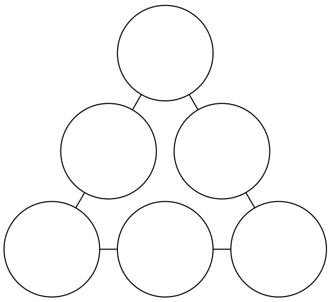
Riešenie. Všimnime si, že každý trojuholník, ktorý vieme vytvoriť musí mať jeden vrchol v najvyššie položenom bode obrázku a zvyšné dva body musia súčasne ležať na jednej zo štyroch rovnobežných úsečiek. Žiadny iný útvar z bodov na obrázku nie je trojuholník. Pozrime sa na najspodnejšiu zo štyroch rovnobežiek. Vidíme na nej 4 rôzne body, pričom každá dvojica bodov určuje jeden trojuholník. Otázka teda znie: „Koľko rôznych dvojíc bodov existuje medzi štyrmi bodmi?“. Ak si body označíme ako A, B, C a D, poľahky zistíme, že možností je 6 a to (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D). Existuje preto 6 rôznych trojuholníkov takých, že dva ich body ležia na spodnej úsečke. Ostáva si uvedomiť, že rovnakú úvahu vieme vykonať pre každú zo štyroch rovnobežných úsečiek, pretože na každej sú práve 4 body, ktoré ako vrcholy trojuholníka vyhovujú. Spolu sa na obrázku nachádza $4 \cdot 6 = 24$ trojuholníkov.

Ľahké 15. Športovec vypije každý deň v týždni iné množstvo vody, no vždy to je v litroch celé číslo od 1 do 7. V stredu vypil menej ako v pondelok. Boli len dva dni, kedy vypil viac ako v pondelok. Vo štvrtok ani cez víkend najviac nevypil. V piatok vypil o dva litre menej ako v pondelok. Kedy vypil 7 litrov?

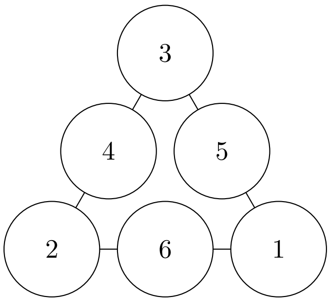
Výsledok. utorok

Riešenie. Uvedomme si, že nás zaujíma deň, kedy vypil najviac. Z prvej informácie vieme, že v pondelok vypil viac ako v stredu, teda v stredu určite najviac nevypil. Vieme, že niektoré dni vypil viac, ako v pondelok, teda aj pondelok môžeme vylúčiť. Z ďalšej informácie vieme, že vo štvrtok, sobotu či nedeľu najviac nevypil, teda aj tieto tri dni môžeme vylúčiť. V piatok vypil menej ako v pondelok, teda určite najviac v piatok nevypil. Jediný deň, ktorý nám ostal, je utorok.

Ľahké 16. Do každého z kruhov na obrázku doplňte práve jedno číslo od 1 po 6 tak, aby bol súčet čísel na každej strane trojuholníka 9.



Výsledok.



Riešenie. Uvedomme si, že číslo vo vrchole trojuholníka sa nachádza v dvoch rôznych súčtoch, zatiaľ čo číslo v strede strany len v jednom. Nech je číslo 6 vo vrchole trojuholníka. Na oboch stranách, na ktorých leží kruh s číslom 6, musíme vytvoriť súčet 9 a to dvomi rôznymi spôsobmi. To však nie je možné, pretože 9 sa dá v súčte so 6 vyjadriť len jedinou možnosťou a to ako $9 = 6 + 2 + 1$. Číslo 6 preto musí nutne ležať v strede strany. Čísla 1 a 2 potom ležia na vrcholoch susedných k 6. Strana, ktorej patrí vrchol s číslom 1, musí nutne obsahovať čísla 5 a 3. Žiadna iná možnosť totiž nevedie k súčtu 9. Podobnú úvahu vieme urobiť pre stranu, ktorej patrí vrchol s číslom 2. V tomto prípade musia na príslušnej strane ležať čísla 3 a 4. Odtiaľ už vidíme, že číslo 3 leží na dvoch stranách naraz a musí preto nutne byť v poslednom voľnom vrchole. Čísla 4 a 5 už ľahko doplníme do príslušných stredov, čím dostaneme riešenie v schéme.

Ľahké 17. Sudoku je hlavolam, v ktorom je úlohou doplniť mriežku, ako na obrázku, celými číslami od 1 po 9. Čísla však musia byť umiestnené tak, aby každý riadok, stĺpec a aj každý z deviatich hrubo orámovaných štvorcov obsahoval každé z čísel 1 až 9 práve raz. Zistite, aký súčet dávajú čísla na treťom riadku vyplneného sudoku z obrázku. Sudoku máte dve pre prípad, že sa pomýlite.

			9	8		3	7	
					3			2
			7	2				1
5		1					6	
7		2				1		3
	4					2		5
4				5	7			
6			3					
	1	8		6	9			

			9	8		3	7	
					3			2
			7	2				1
5		1					6	
7		2				1		3
	4					2		5
4				5	7			
6			3					
	1	8		6	9			

Výsledok. 45

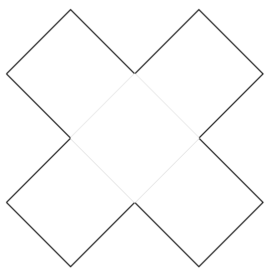
Riešenie. Zo zadania vieme, že v každom riadku musia byť čísla od 1 po 9, pričom sa nesmú opakovať. Keďže máme v každom riadku 9 políčok a máme doplniť 9 daných čísel, tak do tretieho riadku musíme umiestniť všetky čísla od 1 po 9, každé práve raz. Ich súčet je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

Ľahké 18. Kubo našiel mapu k pokladu, ktorá dáva inštrukcie: „Pohni sa o dva kroky na sever, potom o dva kroky na východ a jeden krok na juh. Ďalej o štyri kroky na východ a hneď potom o dva kroky na juh. Následne o dva kroky na západ, o jeden krok na juh, jeden krok na západ. Nakoniec, urob dva kroky na sever a potom dva kroky na východ.“ Kubo išiel presne po ceste, ktorú mapa diktovala a dostal sa na nejaké miesto. Z tohto miesta vykonal inštrukcie znovu, čím sa dostal na nové miesto. Ako ďaleko po ceste (koľko krokov) je toto miesto od pôvodného, kde Kubo stál na začiatku?

Výsledok. 10 krokov

Riešenie. Je jedno v akom poradí Kubo inštrukcie vykonal, lebo svetové strany sa nemenia podľa toho, ako je otočený. Keď si to zhrnieme, podľa inštrukcií urobíme spolu štyri kroky na sever, štyri kroky na juh, osem krokov na východ a tri kroky na západ. Všimnime si, že na sever urobíme rovnaký počet krokov ako na juh. V tomto smere sa teda po dvoch vykonaniach inštrukcií dostaneme na rovnaké miesto, na akom sme boli na začiatku. Ak spravíme osem krokov na východ a tri kroky na západ posunieme sa o päť krokov na východ. Na jedno vykonanie inštrukcií sa teda v tomto smere dostaneme o päť krokov od pôvodného miesta. Po druhom vykonaní inštrukcií bude krokov desať.

Ľahké 19. Päť rovnakých štvorcov je usporiadaných do útvaru na obrázku. Obvod útvaru je 72. Aký je jeho obsah?



Výsledok. 180

Riešenie. Ako si môžeme na obrázku zrátať, obvod útvaru tvorí 12 strán štvorca, keďže sú všetky štvorce rovnaké. Tento obvod je rovný 72, takže jedna strana štvorca je dlhá $72 : 12 = 6$. Vieme, že obsah štvorca zrátame ako súčin jeho dvoch strán, a teda $6 \cdot 6 = 36$. Celý útvar sa skladá z 5 štvorcov a jeho obsah je preto $36 \cdot 5 = 180$.

Ľahké 20. Koľko existuje rôznych trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán a obvodom 9?

Výsledok. 3

Riešenie. Každá strana musí mať dĺžku aspoň 1. Najdlhšia strana trojuholníka je preto dlhá najviac $9-1-1=7$. Vyhovujúci trojuholník, ktorý by mal stranu dĺžky 7 však neexistuje, pretože by musel mať rozmery $(7,1,1)$, čo nevyhovuje trojuholníkovej nerovnosti. Pozrime sa preto na také trojuholníky, ktorých najdlhšia strana je dlhá 6. Do úvahy pripadá jedine trojica rozmerov $(6,2,1)$, čo opäť nespĺňa trojuholníkovú nerovnosť. Podobne zistíme, že najdlhšia strana nemôže merať ani 5. Vyskúšajme ďalej trojuholníky, ktorých najdlhšia strana je dlhá 4. Do obvodu dĺžky 9 nám teda ostáva dĺžka $9-4=5$, ktorú chceme rozdeliť medzi dve strany, aby žiadna strana neprevýšila dĺžkou 4. Do úvahy pripadajú dva trojuholníky, ktoré majú rozmery $(4,4,1)$ a $(4,3,2)$. Hľadajme ďalej také trojuholníky, ktorých najdlhšia strana má dĺžku 3. Všetky ostatné strany tak môžu mať rozmer nanajvýš 3, čo nás privádza k trojuholníku $(3,3,3)$, čo je posledné riešenie. Trojuholník s obvodom 9 totiž nemôže mať najdlhšiu stranu kratšiu ako 3 – v takom prípade by obvod mohol byť nanajvýš $2\cdot 3=6$. Dostali sme tak 3 rôzne trojuholníky.

Ľahké 21. Na ostrove žijú domorodci, z ktorých každý buď vždy klame alebo vždy hovorí pravdu. Turista sa opýtal štyroch domorodcov, aký je deň. Zazneli odpovede:

- „Dnes je piatok.“
- „Predvčerom bol štvrtok.“
- „Včera bola streda.“
- „Zajtra bude nedeľa.“

Ak by turista vedel, koľkí z nich klamali, už by vedel zistiť, aký je deň. Na základe tejto informácie určte, aký deň je.

Výsledok. Sobota

Riešenie. Podľa odpovedí najprv zistíme, aký deň je podľa nich dnes. Dostávame: piatok, sobota, štvrtok, sobota. Keďže zazneli tri rôzne odpovede a maximálne jedna z nich môže byť správna, tak museli klamať 2, 3 alebo všetci 4:

- Klamali 4 - Nevedeli by sme zistiť, aký je dnes deň, stále by nám ostávali 4 možnosti.
- Klamali 3 - Určite teda museli klamať obaja, ktorí tvrdili, že je sobota. Ďalej ale mohol klamať kľudne aj ten, čo tvrdil, že je piatok, aj ten, čo štvrtok. Ani informácia, že klamali 3, by nám nestačila na presné určenie dňa.
- Klamali 2 - Ak by klamári boli tí, ktorí tvrdia, že je sobota, tak potom zvyšní dvaja vravia pravdu. To by ale znamenalo, že by dnes musel byť súčasne štvrtok aj piatok, čo sa nedá. Domorodci, ktorí tvrdia, že je sobota, musia vravieť pravdu a klamári sú zvyšní dvaja.

Jediná možnosť, v ktorej potom, čo nám prezradia počet klamárov, vieme zistiť, aký je dnes deň, je možnosť, že klamali 2 z domorodcov. A ako sme podľa toho zistili, dnes musí byť sobota.

Ľahké 22. Očíslovaná mriežka rozmerov 6×5 na obrázku vznikla tak, že sme k sebe naukladali pätnásť blokov domina. Jeden blok domina má rozmery 1×2 a sú na ňom napísané dve čísla – každé z nich je aspoň 0 a najviac 4. Žiadne dva domino bloky, ktoré sme na stavbu mriežky použili, na sebe nemajú rovnakú dvojicu čísel. Zároveň sme použili bloky s každou možnou dvojicou čísel od 0 po 4. Vyznačte na mriežke na obrázku hranice jednotlivých domino blokov. Mriežky sú rovnaké, máte ich viac pre prípad, že sa pomýlite.

1	2	4	0	2	0
1	3	1	3	4	1
0	1	4	1	3	2
3	0	4	0	4	4
3	0	2	2	3	2

1	2	4	0	2	0
1	3	1	3	4	1
0	1	4	1	3	2
3	0	4	0	4	4
3	0	2	2	3	2

1	2	4	0	2	0
1	3	1	3	4	1
0	1	4	1	3	2
3	0	4	0	4	4
3	0	2	2	3	2

Výsledok.

1	2	4	0	2	0
1	3	1	3	4	1
0	1	4	1	3	2
3	0	4	0	4	4
3	0	2	2	3	2

Riešenie. Najprv si rozmyslíme, koľko rôznych dominových blokov s číslami 0 až 4 existuje. Veľmi rýchlo zistíme, že ich je 15 ((0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)). Skúsme sa najprv zamerať na tie, ktoré majú obe čísla rovnaké. Na prvý pohľad je nám jasné, kde umiestnime všetky takéto bloky (lebo sa tam nachádzajú len raz) okrem toho, ktorý má na oboch častiach číslo 4 (ten by teoreticky mohol byť na dvoch miestach). Zároveň hneď vidíme pozíciu bloku (0,1), lebo číslo 0 pod blokom (1,1) musíme nejak použiť a to ide len jedným spôsobom. Naša mriežka zatiaľ vyzerá takto:

1	2	4	0	2	0
1	3	1	3	4	1
0	1	4	1	3	2
3	0	4	0	4	4
3	0	2	2	3	2

Vieme tiež zistiť, kde je blok (3,0) a blok (1,2) – je na to len jediná možnosť. Vďaka tomu môžeme tvrdiť, že v pravom hornom rohu je blok (2,0) a pod ním blok (4,3) (ináč by sme nevyplnili štvorku, ktorá je súčasťou tohto bloku). Naša mriežka momentálne:

1	2	4	0	2	0
1	3	1	3	4	1
0	1	4	1	3	2
3	0	4	0	4	4
3	0	2	2	3	2

Teraz sa pozrime na číslo 1, ktoré sa nachádza pod blokom (3,0). Blok, v ktorom sa nachádza, musí byť vodorovný, pretože blok (1,0) už máme. Vďaka tomu hneď vieme o bloku (4,0) pod ním, bloku (4,4) vedľa a bloku (3,2) – pravý dolný roh mriežky. Ostatné chýbajúce bloky – (2,4) a (3,1) už vieme doplniť do nevyplnenej časti mriežky.

Ľahké 23. Otec má 48 rokov, syn 21. Pred koľkými rokmi bol otec desaťkrát starší ako jeho syn? Vek je kladné celé číslo.

Výsledok. 18

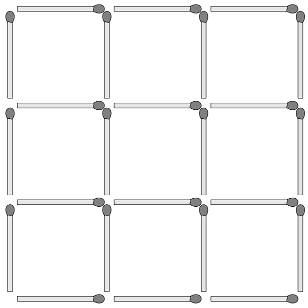
Riešenie. Keď bol otec desaťkrát starší, jeho vek musel byť desaťnásobkom synovho veku, a teda musel končiť nulou (tak ako všetky násobky desiatky – 0, 10, 20, 30, ...). To sa mohlo stať pred 8 rokmi, keď mal otec 40 a syn 13 rokov. To ale otcov vek nie je desaťkrát väčší ako synov a toto preto nie je riešenie. Do úvahy pripadá tiež situácia pred 18 rokmi, kedy mal otec 30 a syn 3 roky, čo sedí, lebo $30 = 10 \cdot 3$. Pred 28 a viac rokmi to už nastať nemohlo, lebo syn ešte nežil. Jediným riešením je preto 18 rokov.

Ľahké 24. Lev ako kráľ zvierat sa rozhodol, že vyberie radu starších zo svojich poddaných. Lev vládne antilopám, hyenám a somárom. Všetkých zvierat, ktorým vládne, je dokopy tridsať. Ak lev vyberie šestnásť zvierat, určite bude medzi nimi aj nejaký somár. Ak vyberie o jedno zviera viac, určite už bude medzi nimi aj hyena. Z každého druhu zvieraťa je medzi levovými poddanými aspoň jeden zástupca. Koľkým hyenám vládne lev?

Výsledok. 14 hyenám

Riešenie. Keď lev vyberie ľubovoľných 16 zvierat, určite je medzi nimi somár. To znamená, že keď vyberie všetky antilopy a hyeny, tak ich je dokopy menej ako 16. Inak by mohol vybrať 16 zvierat tak, že medzi nimi sú len antilopy a hyeny. Z toho vieme, že antilop a hyen je dokopy maximálne 15, a teda somárov je minimálne 15, keďže dokopy je 30 zvierat.
Keď lev vyberie ľubovoľných 17 zvierat, určite je medzi nimi hyena. To znamená, že keď vyberie všetky antilopy a somáre, tak ich je dokopy menej ako 17. Inak by mohol vybrať 17 zvierat tak, že medzi nimi sú len antilopy a somáre. Z toho vieme, že antilop a somárov je dokopy maximálne 16. Tiež vieme, že somárov je aspoň 15 a antilopa je aspoň 1, keďže z každého druhu máme aspoň jedno zviera. No to ale znamená, že somárov je presne 15 a antilopa je 1, pretože ak by niektorého druhu bolo viac, tak by somárov a antilop dokopy bolo viac ako 16, čo však vedie k sporu.
Zvierat je dokopy 30, takže si už vieme dopočítať počet hyen: $30 - 15 - 1 = 14$.

Ľahké 25. Rozhodnite, koľko najmenej zápaliek potrebujeme z obrazca odobrať, aby v ňom zápalky netvorili žiadne štvorce.

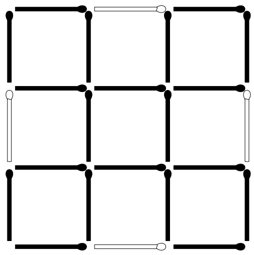


Výsledok. 6

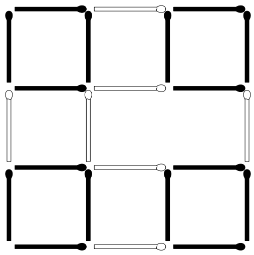
Riešenie. Naším cieľom bude ukázať, že ak odoberieme akýchkoľvek 5 zápaliek, neodstránime všetky štvorce a navyše ukážeme spôsob, akým sa dá odobrať 6 zápaliek tak, že žiaden štvorec neostane. Poďme teda skúsiť úlohu vyriešiť na 5 odobratí a ukážeme, že to nejde. Na obrázku 1 máme vyznačených 5 malých štvorcov pozostávajúcich z čiernych zápaliek. Na to, aby sme tieto štvorce zničili, musíme z každého odobrať aspoň jednu zápalku. Navyše by sme chceli odobrať len 5 zápaliek, a preto z každého zo štvorcov môžeme odobrať len jednu.

- Vezmime si preto prostredný štvorec a odoberme z neho jednu zápalku. Takto dostaneme situáciu na obrázku 2. Ak by sme odobrali inú zápalku, obrázok môžeme jednoducho pootočiť. Teda nech sa deje čokoľvek, máme len jednu možnosť ako odstrániť zápalku z prostredného štvorca.
- Ďalej sa pokúsime odstrániť zápalku zo štvorčeka v prostrednom riadku, úplne naľavo. Keďže odstraňovať môžeme len čierne zápalky, dostaneme situáciu ako na obrázku 3. Ak by sme sa rozhodli odstrániť dolnú zápalku, celý obrázok môžeme preklopiť v zvislom smere. Preto sme mali opäť len jednu možnosť, ako zápalku odstrániť.
- V nasledujúcom kroku sa pozrieme na štvorček v prostrednom stĺpci, úplne hore. Jediná možnosť, ako z neho odstrániť zápalku, je odobrať zápalku na pravej strane. Dostaneme sa tak do situácie na obrázku 4.
- Teraz sa môžeme pozrieť na štvorec 2×2 v pravom hornom rohu. Z tohto štvorca môžeme odstrániť opäť len jednu zápalku. Dostaneme sa takto k situácii na obrázku 5.
- Teraz si zoberieme štvorček v prostrednom stĺpci, úplne dole. Z neho vieme opäť odstrániť len jednu zápalku a dostaneme sa tak situáciu na obrázku 6, kde vidíme, že po obvode máme stále štvorec 3×3.

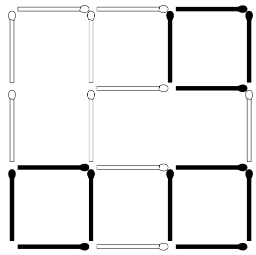
Takto sme odoberali len zápalky, ktoré sme museli, a preto sa úloha nedá vyriešiť odobratím len piatich zápaliek. Preto to musí ísť na šesť alebo viac. Ak si ale všimneme obrázok 6, stačí nám odobrať ktorúkoľvek zo zápaliek na obvode a dostaneme riešenie pre 6 odobratých zápaliek.



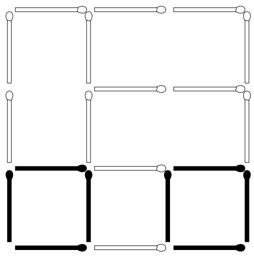
Obrázok 1



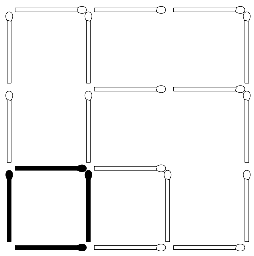
Obrázok 2



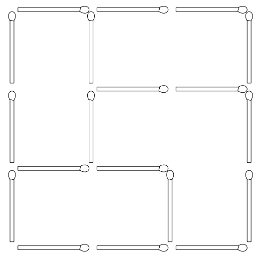
Obrázok 3



Obrázok 4

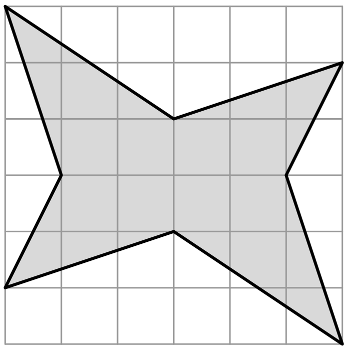


Obrázok 5



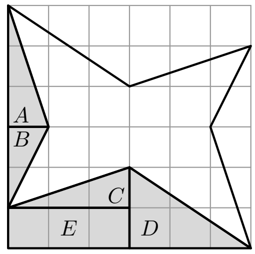
Obrázok 6

Stredné 1. Aký obsah má sivý útvar na obrázku, ak každý malý štvorček má obsah 1?



Výsledok. 16

Riešenie.



Obsah sivého útvaru vypočítame tak, že od obsahu celého štvorca 6×6 odpočítame obsah časti, ktorá sa v útvare nenachádza. Všimnime si ešte, že ak by sme útvar otočili o 180°, dostali by sme úplne rovnaký obrázok. Preto nám stačí zistiť len polovicu časti, ktorú chceme odpočítať a následne ju odpočítať dvakrát. Na nasledujúcom obrázku sme si rozdelili časť, ktorú chceme odpočítať na niekoľko trojuholníkov a jeden obdĺžnik. Obsahy týchto útvarov ale vieme zistiť jednoducho.

- Obsah trojuholníka označeného písmenom B je polovica obdĺžnika 1×2, a preto má obsah 1.
- Obsah trojuholníka označeného písmenom D je polovica obdĺžnika 3×2, a preto má obsah 3.
- Obsah obdĺžnika označeného písmenom E je 3.
- Trojuholníky označené písmenami A a C spolu tvoria obdĺžnik 1×3, a preto ich obsah je spolu 3.

To nám spolu dáva obsah 10, a preto obsah útvaru zo zadania je $6 \cdot 6 - 2 \cdot 10 = 16$.

Stredné 2. 15 strán papiera, položených na sebe, sme zohli na polovicu a dostali sme tak 60-stranový zošit. Strany sme očíslovali od 1 do 60. Aké ďalšie 3 čísla sú na tom istom papieri ako strana číslo 42?

Výsledok. 19, 20 a 41

Riešenie. Na prvom papieri máme strany číslo 1, 2, 59 a 60. Na druhom 3, 4, 58 a 57 (už vidíme, že na ďalších papieroch sa nachádzajú postupne ďalšie nasledujúce dvojice čísel, pretože jedna polovica papiera pojme dve, po sebe idúce, strany). Stranu 42 nájdeme v dvojici spolu s číslom 41 na desiatej strane (je to desiata dvojica). Podobne, desiata dvojica v poradí odpredu obsahuje čísla 19 a 20. Na danom papieri teda nájdeme 19, 20, 41 a 42.

Stredné 3. Z piatich menších reťazí, majúcich 3, 4, 5, 6 a 7 článkov, si necháme zhotoviť jednu súvislú, do kruhu nespojenú reťaz, ktorá má 25 článkov. Preseknutie jedného článku stojí 10 zlatých, zvarenie jedného preseknutého článku stojí 40 zlatých. Koľko najmenej za zhotovenie reťaze zaplatíme? Akú najdlhšiu reťaz viete vyrobiť za 50 zlatých?

Výsledok. 150 zlatých, reťaz dĺžky 14

Riešenie.
Na spojenie piatich reťazí potrebujeme aspoň 4 články. My však používame články z reťazí, ktoré už máme. Preto je nám výhodnejšie jednu z reťazí úplne rozobrať a využiť jej články na spojenie zvyšných reťazí. Na spojenie štyroch reťazí potrebujeme 3 články. Preto aspoň tri články potrebujeme preseknúť a opäť zvariť. Tieto články môžeme získať tak, že presekneme všetky články reťaze dĺžky 3 a spojíme nimi zvyšné 4 reťaze do jednej dlhej. Tri preseknutia a tri zvarenia spolu stoja 150 zlatých.
Teraz sa pozrime na druhú otázku. Ak máme len 50 zlatých, môžeme preseknúť a opäť zvariť len jeden článok a spojiť ním dve reťaze. Keďže chceme najdlhšiu možnú reťaz, budeme spájať dve najdlhšie reťaze, a teda dostaneme reťaz dĺžky $7 + 6 + 1$ (1 článok navyše, ktorým sme reťaze spájali).

Stredné 4. Trojciferné číslo považujeme za *krásne* vtedy, keď sa súčet jeho krajných číslic rovná prostrednej. Koľko krásnych čísel existuje?

Výsledok. 45

Riešenie. Všimnime si, že súčet krajných cifier môže byť najviac 9, pretože musí byť sám cifrou. Pre každú cifru zrátajme, koľkými spôsobmi ju vieme zapísať ako súčet dvoch cifier, pričom nám záleží na poradí týchto dvoch cifier. Pre 9 máme možností 10, a to $9+0 = 8+1 = 7+2 = \cdots = 0+9$. Pre 8 máme možností 9, a to: $8+0 = 7+1 = \cdots = 0+8$. Ak takto prejdeme všetky cifry až po 1, dostávame spolu $10+9+8+7+6+5+4+3+2 = 54$ možností. Nezabudli sme na niečo? 0 v strede krásneho čísla byť nemôže, pretože súčtu by vyhovovalo len číslo zo samých núl a to nie je trojciferné. Z podobných dôvodov nemôže žiadne krásne číslo začínať nulou (nebolo by trojciferné). My sme však takú možnosť pre každú z cifier 1 až 9 započítali. Od výsledku ich preto musíme ešte odčítať. Krásnych čísel je $54-9 = 45$.

Stredné 5. Medzi piatich bratov, narodených v rôzne roky s ročnými rozostupmi, rozdelíme 100 €nasledovne: každý z bratov dostane o 5 €viac ako jeho o rok mladší brat. Koľko dostane najmladší z bratov?

Výsledok. 10 €

Riešenie. Ak by najmladší dostal 0 €, ostatní by postupne dostali $5, 10, 15$ a najstarší 20 €. To je však dokopy iba 50 €. Potrebujeme rozdeliť ešte zvyšných 50 €. Na to, aby sme zachovali rozdiely ich súm podľa zadania, musíme zvyšnú čiastku rozdeliť rovnomerne, preto každý z bratov dostane ešte 10 €. Najmladší z bratov preto dostane 10 €, čo si vieme overiť skúškou.

Stredné 6. Máme tri špeciálne hracie kocky, z ktorých každá má len 4 steny a na každej stene je jedno písmenko. Keď hodíme všetky kocky naraz, dostaneme tri náhodné písmenká. Pri ôsmich hodoch trojicou kociek sme dostali na kockách takéto trojice písmen: *CAT*, *SON*, *POD*, *RIG*, *PEG*, *TAP*, *DIN*, *APE*. Aké písmenká máme na jednotlivých kockách?

Výsledok. *PCNR*, *ETOI* a *GADS*

Riešenie. Každé zo slov nám padlo tak, že každé z jeho písmen padlo na inej kocke (predsa na jednej kocke nevedia padnúť dve písmená súčasne). Teda každé slovo nás informuje, že jeho tri písmená sa nachádzajú na navzájom rôznych kockách. Pozrime sa na slovo *PEG*. Jeho písmená nech ležia na kockách, ktoré označíme p, e a g (v tomto poradí). V *APE* už dve písmená máme zaradené, teda to tretie, A, patrí kocke g. Pokračujme slovom *TAP*. Obdobnou úvahou ako u *APE* dospejeme k tomu, že T je na e. Ďalej z *CAT* vieme, že C leží na p. Ešte zostávajú dve písmená na každej kocke. Podľa *POD*, O a D ležia v nejakom poradí na e a g, podľa *RIG*, R a I na p a e. Teda niektoré dve z týchto štyroch písmen ležia na e, z čoho plynie, že zvyšné písmená (S a N) neležia na e (pretože už sme jej priradili štyri rôzne písmená). Na základe tohto faktu a *SON*, určite je O na e, a teda D na g. Nakoniec nám *DIN* vylučuje N z g, takže patrí p a na g sa zvyšuje S, I leží na e a R na p. Takto sme dostali *PCNR*, *ETOI* a *GADS*.

Stredné 7. Starý hodinár má vo svojej zbierke zvláštny digitálny budík, ktorý ukazuje hodiny a minúty v 24-hodinovom formáte. Budík zvoní vždy, keď súčet cifier, ktoré budík ukazuje, sa rovná číslu 22. Zistite, koľkokrát za deň budík zvoní.

Výsledok. 9

Riešenie. Rozdeľme si štvorčíslie na budíku na dve časti − hodiny a minúty. Ako vidno, hodiny nadobúdajú ciferný súčet nanajvýš $10 = 1+9$, minúty zase $14 = 5+9$. Z čísla nepresahujúceho 10 a čísla nepresahujúceho 14 nasčítame 22 ako $10+12$, $9+13$ alebo $8+14$. Koľko máme na to možností? Súčet 10 dosahuje jedna hodina (19), 9 dve (9 a 18), 8 tiež dve (8 a 17). Súčet 12 prinášajú každú hodinu tri minúty (39, 48 a 57), 13 dve (49 a 58) a 14 jedna (59). To nám pre všetky spôsoby nasčítania dáva $1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 1 = 9$ časov so súčtom cifier 22. Sú to konkrétne $8:59$, $9:49$, $9:58$, $17:59$, $18:49$, $18:58$, $19:39$, $19:48$ a $19:57$.

Stredné 8. Na hodine telesnej výchovy bolo najviac 50 žiakov. Vieme, že ak sa postavili do štyroch radov, tak jeden rad bol oproti každému inému radu kratší o jedného žiaka. Keď sa postavili do piatich radov, tak jeden rad bol oproti každému inému radu dlhší o jedného žiaka. Nakoniec sa postavili do troch radov a jeden rad bol oproti každému ďalšiemu dlhší o jedného žiaka. Koľko bolo žiakov na hodine telesnej?

Výsledok. 31

Riešenie. Po postavení do štyroch radov má jeden rad o človeka menej, čiže vieme, že počet žiakov je násobok čísla 4 zmenšený o 1. Po postavení do piatich radov má jeden rad o jedného človeka viac, čiže vieme, že počet žiakov je zároveň aj násobok čísla 5 zväčšený o 1. Po postavení do troch radov mal jeden rad o jedného človeka viac, teda vieme, že počet žiakov je aj násobok čísla 3 zväčšený o 1. Musíme už len nájsť také číslo, ktoré má tieto tri vlastnosti zároveň. Vypíšme si preto všetky násobky 5 zväčšené o 1, ktoré sú menšie ako 50 (vypíšeme čísla práve s touto vlastnosťou preto, lebo ich je menej ako násobkov 3, či 4). Dostávame 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46. Pre každé z týchto čísel overíme, či spĺňa aj zvyšné dve požadované vlastnosti a zistíme, že vyhovuje jedine 31, čo je jediný možný počet žiakov.

Stredné 9. Koľko trojciferných čísel obsahuje práve jednu štvorku?

Výsledok. 225

Riešenie. Rozoberme tri prípady:

1. Nech je štvorka na mieste stoviek: na mieste desiatok a jednotiek tým pádom už byť nemôže. Na každej z týchto pozícií však môže byť ľubovoľná iná číslica, ktorých zvyšuje 9. Spolu preto máme $9 \cdot 9 = 81$ čísel takých, že obsahujú práve jednu štvorku, ktorá je na pozícii stoviek.

2. Nech je štvorka na mieste desiatok: na mieste stoviek môže byť akákoľvek číslica okrem štvorky a nuly − v prípade nuly by tak číslo nebolo trojciferné. Na prvú pozíciu preto môžeme vybrať 8 rôznych cifier a ku každej z nich vieme pridať niektorú z 9 cifier (všetky okrem štvorky) na pozíciu jednotiek. Dostávame tak $8 \cdot 9 = 72$ možností.

3. Nech je štvorka na mieste jednotiek: Podobne ako v predchádzajúcom prípade, na miesto stoviek vieme z rovnakých dôvodov vybrať 8 rôznych cifier a ku každej z nich vieme, na miesto desiatok, vybrať niektorú z 9 cifier. Máme preto tiež $8 \cdot 9 = 72$ možností.

Spolu existuje $81 + 72 + 72 = 225$ trojciferných čísel, ktoré obsahujú práve jednu štvorku.

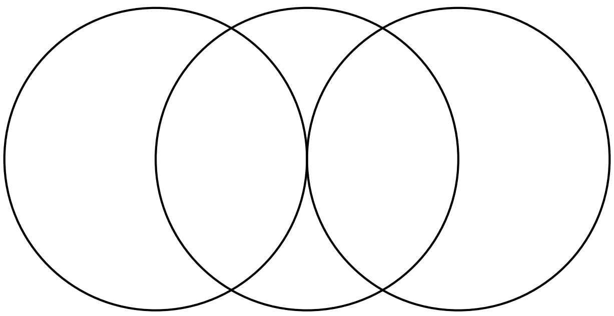
Stredné 10. Koľko trojciferných čísel má ciferný súčin rovný 24?

Výsledok. 21

Riešenie. Najprv potrebujeme nájsť všetky také trojice jednociferných čísel, ktorých súčin je 24. Postupne skúšame dvojice čísel a dopĺňame tretie tak, aby súčin bol 24. K (1,1) potrebujeme 24, čo nie je jednociferné číslo, k (1,2) nám chýba 12, čo stále nie je cifra. K (1,3) doplníme 8, k (1,4) zase 6. Číslo 24 nie je násobkom 5, takže cifru 5 číslo neobsahuje. (1,6) sme už dostali, takže končíme s trojicami s cifrou 1. (2,2) doplníme o číslo 6, (2,3) o číslo 4. (2,4) už máme, teda iné trojice s cifrou 2 už nedostaneme. Trojice bez 1 a 2 už nedostaneme, lebo to by bol súčin minimálne $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, čo je viac ako 24. Dostali sme teda tieto trojice: $(1, 3, 8)$, $(1, 4, 6)$, $(2, 2, 6)$, $(2, 3, 4)$. Z jednej trojice rôznych čísel dokážeme vytvoriť 6 trojciferných čísel. Pre prvú trojicu to je: 138, 183, 318, 381, 813, 831. Trojica $(2, 2, 6)$ však obsahuje dve rovnaké čísla – z nej dokážeme vytvoriť len 3 jedinečné trojciferné čísla, a to 226, 262, 622 (podľa pozície čísla 6 – na mieste jednotiek, desiatok alebo stoviek, na zvyšné dve pozície sa doplnia čísla 2). Podarilo sa nám nájsť $6 + 6 + 3 + 6 = 21$ takých trojciferných čísel.

Stredné 11. Nakreslite tri kružnice tak, aby vzniklo práve päť priesečníkov (bodov, v ktorých sa nejaké kružnice pretínajú).

Výsledok.



Riešenie. Vieme, že dve kružnice sa pretínajú buď v jednom bode (dotýkajú sa), alebo v dvoch bodoch. Medzi tromi kružnicami existujú tri rôzne dvojice kružníc. Päť priesečníkov teda dostaneme tak, že dve dvojice sa budú pretínať v dvoch bodoch a posledná dvojica sa bude dotýkať, teda pridá iba jeden priesečník. Náčrt takej polohy vidíme na obrázku.

Stredné 12. V príklade 8★52 + 5★★6 + ★57★ = ★2480 sú niektoré cifry nahradené hviezdičkami. Určte súčet všetkých cifier, ktoré sa nachádzajú na pozíciách hviezdičiek.

Výsledok. 25

Riešenie. Najprv zistíme jednotlivé cifry skrývajúce sa pod symbolmi hviezdičky. Vieme, že na mieste jednotiek vo výsledku je cifra 0. Keďže máme dané cifry 6 a 2, ich súčet a súčet hľadanej cifry musí končiť na 0, teda 10. Z toho vyplýva, že v tomto prípade jediná vyhovujúca cifra je $10 - 6 - 2 = 2$. Na mieste desiatok je v súčte cifra 8. Keďže máme dané cifry 5 a 7, tak súčet všetkých cifier na mieste desiatok musí byť 18. Musíme si ale uvedomiť, že nám zostal zvyšok 1 zo súčtu na mieste jednotiek, ktorý musíme tiež zarátať, čiže pod symbolom bude v tomto prípade cifra $18 - 5 - 7 - 1 = 5$. Na mieste stoviek máme danú len cifru 5 a 4, ktorá sa nachádza vo výslednom súčte. Z toho je teda jasné, že súčet cifry 5 a cifier pod symbolmi musí byť 14 (lebo to musí byť aspoň 5, najviac 23 a končí to na cifru 4). V tomto prípade máme ukryté cifry pod dvoma symbolmi, ale to nevadí, lebo aj keď nevieme presne určiť, aké sa tam nachádzajú cifry, vieme určiť ich súčet, ktorý musí byť vždy rovnaký. Opäť však nesmieme zabudnúť na zvyšok 1. Súčet cifier pod symbolmi bude v tomto prípade $14 - 5 - 1 = 8$. Na mieste tisícok je vo výsledku cifra 2, ale keďže máme pri sčítavaní dané cifry 8 a 5, ich súčet spolu s cifrou pod symbolom musí byť 22 (číslo medzi 13 a 22, čo končí na 2). Keďže máme znova zvyšok 1, cifra pod symbolom bude v tomto prípade $22 - 8 - 5 - 1 = 8$. Vzhľadom na to, že výsledok bol 22, v tomto prípade máme zvyšok 2, a teda pod posledným symbolom bude cifra 2. Takže súčet cifier pod symbolmi je $2 + 5 + 8 + 8 + 2 = 25$.

Stredné 13. V stavebnici máme len jeden typ stavebného bloku – kváder s rozmermi hrán 3 cm, 5 cm a 7 cm. Z blokov budujeme vežu tak, že jedno poschodie veže tvorí vždy len jeden blok. Koľko najmenej a koľko najviac blokov vieme použiť na stavbu veže, ktorá má výšku práve 50 cm?

Výsledok. Najmenej 8 a najviac 16

Riešenie. Ak chceme použiť čo najviac blokov, budeme ich ukladať najmenšou stranou na výšku. Všimnime si, že 17 blokov je už veľa, pretože $17 \cdot 3 = 51$, čo prevyšuje 50. Maximum kociek, čo vieme použiť, preto musí byť menej. Vyskúšajme 16 – veža sa skutočne dá postaviť. Stačí postaviť 15 blokov na výšku 3 cm a posledný blok na výšku 5 cm. Najviac blokov, čo vieme pri stavbe využiť, je preto 16.
Naopak, ak chceme použiť čo najmenej kociek, budeme sa snažiť položiť čo najviac blokov tak, aby boli vysoké 7 cm na výšku. Sedem blokov stačiť nebude, pretože $7 \cdot 7 = 49 < 50$. Veža výšky 49 sa navyše do výšky 50 ani doplniť nedá. Aspoň jeden zo siedmich blokov výšky 7 preto musíme položiť inou výškou nahor. Ak použijeme šesť blokov na výšku 7, dostaneme vežu vysokú 42. Tú však musíme na požadovanú výšku 50 doplniť aspoň dvoma blokmi – dá sa to jedným na výšku 5 a jedným na výšku 3. Minimum kociek, čo musíme pri stavbe použiť, je preto 8.

Stredné 14. Peťo zabudol štvorcíselný kód svojho zámku. Našťastie si o ňom pamätá, že prvé dvojčíslie je násobok 15 a posledné dvojčíslie je násobok 7. Peťo je však veľký smoliar, a preto musel vyskúšať všetky možnosti (vrátane možnosti 0000) a až posledná bola správna. Na koľký pokus Peťo otvoril zámok?

Výsledok. 105

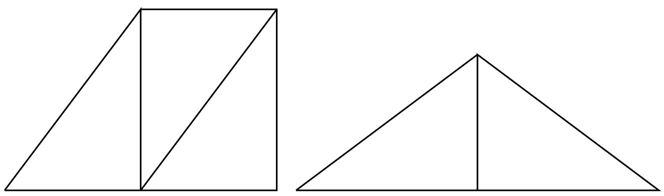
Riešenie. Najprv zistíme, koľko je násobkov čísla 15 menších ako 100 – je ich sedem, a to 15, 30, 45, 60, 75, 90 a nesmieme ešte zabudnúť na 0, respektíve dvojčíslie 00, ktoré je tiež násobkom 15 a môže preto byť na začiatku kódu. Podobne napočítame pätnásť dvojčíslí (vrátane 00 a 07), ktoré sú násobkami 7. Nech už stojí na prvom dvojčíslí kódu ľubovoľná zo siedmich možností násobkov 15, na poslednom dvojčíslí môže stať ktorákoľvek z pätnástich možností násobkov 7. Celkovo preto máme $7 \cdot 15 = 105$ možností.

Stredné 15. Na sústredení je dvanásť chlapcov a niekoľko dievčat. Každý chlapec na sústredení pozná práve tri z dievčat na sústredení. Každé dievča na sústredení pozná práve štyroch z chlapcov na sústredení. Zistite, koľko je na sústredení dievčat, ak je známosť dvoch osôb vzájomná (ak chlapec pozná nejaké dievča, tak toto dievča nutne pozná tohto chlapca a naopak).

Výsledok. 9

Riešenie. Keď každý z dvanástich chlapcov pozná práve tri dievčatá, tak na sústredení je spolu $12 \cdot 3 = 36$ známostí medzi chlapcami a dievčatami. Známosť je vzájomná, a keďže každé dievča ma známosti práve 4, musí byť na sústredení $36 : 4 = 9$ dievčat.

Stredné 16. Janka mala tri zhodné trojuholníky, z ktorých zložila obrazec vľavo, ktorý mal obvod 18. Potom vzala len dva zo svojich trojuholníkov a zložila obrazec vpravo, ktorý mal obvod tiež 18. Zistite, aký je obvod jedného z Jankiných trojuholníkov.



Výsledok. 12

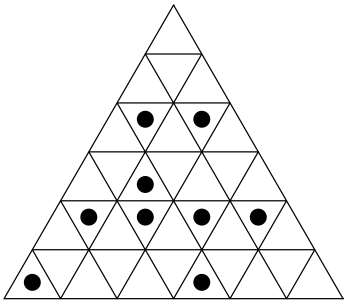
Riešenie. Označme si strany po poradí podľa ich dĺžky a, b, c. Na druhom obrázku vidíme, že obvod útvaru je zložený z dvoch strán a a dvoch strán b. Polovica tohto obvodu preto bude jedna strana a a jedna strana b. Celkový obvod bol 18, takže polovica obvodu bude $18 : 2 = 9$, čo je toľko, čo merajú strany a a b dokopy.
Obvod prvého útvaru je tvorený jednou stranou a, jednou stranou b a tromi stranami c. Už vieme, že strany a a b merajú dokopy 9. Zvyšných $18 - 9 = 9$ jednotiek obvodu teda musia dávať tri strany c. Jedna strana c je preto dlhá $9 : 3 = 3$. Obvod Jankinho trojuholníka je súčet dĺžok strán a, b a c, teda $9 + 3 = 12$.

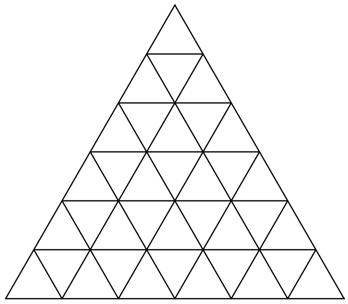
Stredné 17. Máme trojciferné číslo, ktoré má všetky cifry nepárne. Po pripočítaní 421 dostaneme trojciferné číslo, ktoré má všetky cifry párne. Aké trojciferné čísla majú túto vlastnosť?

Výsledok. $179, 199, 379, 399$

Riešenie. Hľadané trojciferné číslo s nepárnymi ciframi si označme $\overline{ABC}$. Toto označenie znamená, že cifru na mieste jednotiek označíme ako C, na mieste desiatok ako B a na mieste stoviek ako A. Hľadané číslo sčítavame s číslom 421. Na mieste jednotiek sčítavame cifry C a 1. Súčet týchto dvoch nepárnych cifier na mieste jednotiek bude vždy párny, čo vyhovuje zadaniu. Na mieste desiatok sčítavame nepárnu cifru B, párnu cifru 2 a možno zvyšok 1 zo sčítavania cifier na mieste jednotiek, a to podľa toho, či nastáva prechod cez desiatku. Aby súčet týchto čísel bol párny, tak prechod cez desiatku musí nastať, a to bude práve v prípade, keď súčet $C + 1$ je aspoň 10. Z toho dostávame jedinú možnosť pre cifru na mieste jednotiek – C musí byť 9. Podobne na mieste stoviek sčítavame nepárnu cifru A, párnu cifru 4 a možno zvyšok 1 z prechodu cez desiatku na mieste desiatok. Znova, aby bol súčet párny, prechod cez desiatku musí nastať. Podľa tejto podmienky $B + 2 + 1$ (1 je zvyšok po prechode cez desiatku na mieste jednotiek) musí byť aspoň 10. Preto B môže byť 7 alebo 9. Ak v súčte na mieste stoviek nastane prechod cez desiatku, potom výsledok súčtu bude štvorciferné číslo začínajúce na nepárnu cifru 1. Tomu musíme zabrániť, a to tak, že zabezpečíme, aby na mieste stoviek nebol prechod cez desiatku. Teda súčet $A + 4 + 1$ musí byť najviac 9. Vyhovujúce cifry, ktoré môžeme dosadiť za A, sú 1 a 3 (pri cifre 5 už bude súčet hľadaného čísla a 421 presahovať 1000). Keď to zhrnieme, tak na mieste jednotiek musí byť cifra 9, na mieste desiatok môžu byť cifry 7 a 9 a na mieste stoviek môžu byť cifry 1 a 3. Takže jedinými riešeniami úlohy sú čísla 179, 199, 379 a 399.

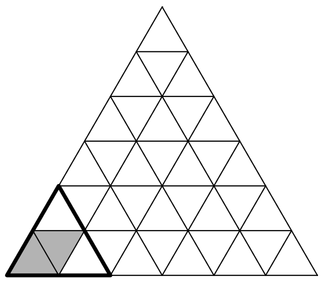
Stredné 18. Tomáš má plánik zložený z 36 malých trojuholníkov ako na obrázku. Každý z malých trojuholníkov je buď biely alebo má čiernu bodku. Tomáš v každom ťahu vyberie nejaký „veľký“ trojuholník zložený zo štyroch malých trojuholníkov. Vo vybranom „veľkom“ trojuholníku vymení každý malý biely trojuholník za malý trojuholník s bodkou a každý malý trojuholník s bodkou vymení za malý biely trojuholník. Tomáš tvrdí, že mu stačilo 14 ťahov na to, aby z obrázku vľavo dostal obrázok vpravo. Má Tomáš pravdu? Túto úlohu poriadne vysvetlite, výsledok nestačí.





Výsledok. Nemá

Riešenie.



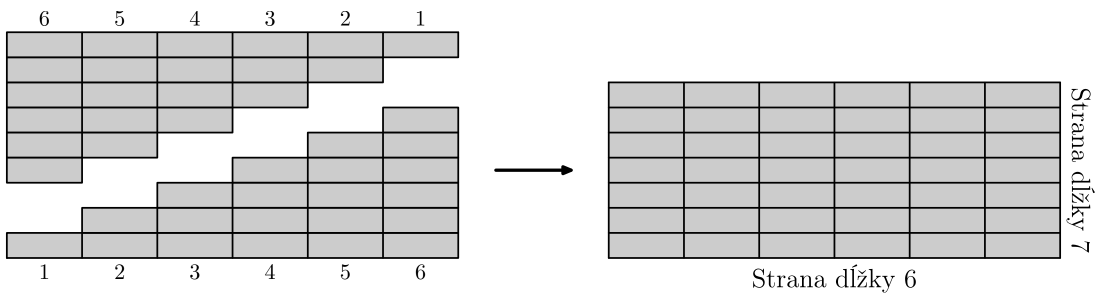
Pozrime sa najskôr na hrubo obtiahnutý trojuholník nachádzajúci sa v ľavom dolnom rohu. Tento trojuholník je jediný, ktorý obsahuje malé trojuholníky zafarbené sivou farbou. Ak by sme teda chceli odstrániť alebo pridať bodku na jeden zo sivých trojuholníkov, musíme bodku pridať alebo odstrániť aj z druhého trojuholníka. Na začiatku sme ale mali situáciu, kde jeden trojuholník bodku obsahoval a druhý nie, zatiaľ čo na konci oba sivé trojuholníky bodku neobsahujú. Preto neexistuje taký postup, ktorým by sme sa mohli dostať zo situácie na prvom obrázku k situácii na druhom obrázku.

Stredné 19. *Šťastné číslo* je také celé číslo, že súčet všetkých celých čísel od 1 až po toto číslo je menší ako 2018. Nájdite najväčšie šťastné číslo.

Výsledok. 63

Riešenie.

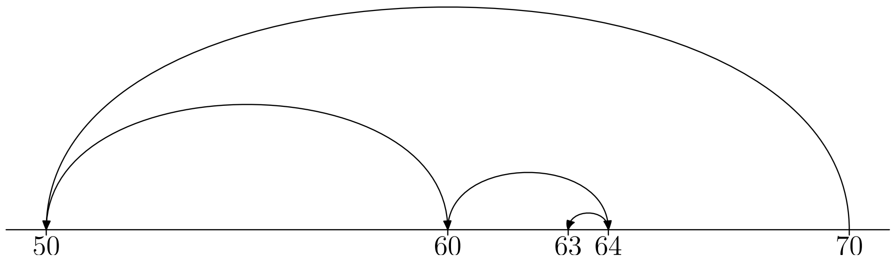
Označme si číslo, ktoré hľadáme, písmenom n. Úlohou je nájsť najväčšie n také, aby súčet čísel od 1 do n bol menší ako 2018. Aby sme nemuseli sčítavať veľa čísel, poďme sa pozrieť na to, ako sa to dá urobiť jednoduchšie. Pre názornosť sa pozrime na prípad $n = 6$. Súčet čísel $1 + \cdots + 6$ si môžeme znázorniť ako na nasledujúcom obrázku. V stĺpcoch máme postupne 1 až 6 obdĺžničkov. Tieto obdĺžničky nám vytvárajú „schody“. Preto nás zaujíma, koľko obdĺžničkov tieto „schody“ obsahujú. Spočítame to tak, že si vytvoríme kópiu „schodov“ a priložíme ju tak, aby nám vznikol obdĺžnik. Presne tak, ako je to na obrázku.



Preto dostávame, že $2 \cdot (1 + \cdots + 6) = 6 \cdot 7$. Rovnakým spôsobom vieme dostať, že $2 \cdot (1 + \cdots + n) = n \cdot (n + 1)$. Teraz už len potrebujeme nájsť najväčšie n také, že $n \cdot (n + 1)/2 < 2018$. Jeden zo spôsobov, ako to urobiť, je skúsiť postupne čísla 1, 2, ..., až kým neprekročíme 2018. Iný zo spôsobov je skúsiť náhodné číslo a zistiť, či sme prekročili 2018. Ak sme 2018 prekročili, vieme, že musíme vyskúšať číslo, ktoré je menšie. V opačnom prípade musíme vyskúšať číslo, ktoré je väčšie. Skúsme preto začať napríklad číslom 70.

- **Ak** $n = 70$, $1 + \cdots + n = 70 \cdot 71/2 = 2485$. Musíme vyskúšať aj nejaké **menšie** číslo.
- **Ak** $n = 50$, $1 + \cdots + n = 50 \cdot 51/2 = 1275$. Musíme vyskúšať aj nejaké **väčšie** číslo.
- **Ak** $n = 60$, $1 + \cdots + n = 60 \cdot 61/2 = 1830$. Musíme vyskúšať aj nejaké **väčšie** číslo.
- **Ak** $n = 64$, $1 + \cdots + n = 64 \cdot 65/2 = 2080$. Musíme vyskúšať aj nejaké **menšie** číslo.
- **Ak** $n = 63$, $1 + \cdots + n = 63 \cdot 64/2 = 2016$. **Našli sme naše hľadané číslo.**

Takto sme postupne vyskúšali čísla 70, 50, 60, 64, 63, ako je to znázornené na nasledujúcom obrázku, a zistili sme, že riešením je 63, keďže 64 už nevyhovuje.



Pozn. ak vieme, že naše hľadané číslo sa nachádza medzi nejakými dvoma číslami, ideálne je zobrať číslo presne v strede medzi nimi. Takto sa nám zmenší počet čísel, ktoré pripadajú do úvahy, na polovicu.

Stredné 20. Koľkými spôsobmi vieme rozdeliť šesť rôznych ponožiek do troch rôznych zásuviek tak, aby sa v každej nachádzal jeden pár ponožiek?

Výsledok. 90

Riešenie. Každý pár ponožiek si vieme predstaviť ako 2 miesta, do každého z nich chceme umiestniť 1 ponožku. Na prvé miesto prvého páru vieme dať každú zo 6 ponožiek. Tým pádom nám ostane už len 5 ponožiek. Každú z nich vieme dať na druhé miesto. Teda počet rôznych prvých párov je $6 \cdot 5 = 30$. Musíme si však uvedomiť, že pár červená – modrá je zhodný s párom modrá – červená, preto tento výsledok delíme 2, a teda počet rôznych prvých párov je $30 : 2 = 15$. Ostali nám ešte 4 ponožky, z ktorých každú vieme dať na prvé miesto druhého páru. Potom nám ostanú 3 ponožky a, opäť, každú z nich vieme dať na druhé miesto v druhom páre. Teda obdobne počet rôznych druhých párov bude $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ (opäť sme tieto dva počty násobili a ich súčin vydelili dvomi, aby nám nevznikali zhodné páry). Ostali nám 2 ponožky. Tie spolu tvoria už hotový 1 pár. Teda máme 15 možností pre prvý, 6 možností pre druhý a 1 možnosť pre tretí pár. Tieto čísla opäť vynásobíme, lebo tri páry umiestňujeme do zásuviek súčasne, a teda pre každú z 15 možností pre prvý pár máme 6 možností pre druhý pár. Teda celkový počet možností je $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$. Tento počet už ničím deliť nemusíme vďaka tomu, že ich umiestňujeme do rôznych zásuviek.

Ťažké 1. Paťo sa učí písať na klávesnici. Pravou rukou vie trafiť klávesy S, D, F, G, H a J. Ľavou, menej zručnou, iba písmeno A. Koľko rôznych 5-písmenových slov dokáže Paťo napísať, ak po každom údere strieda ruky?
Pozn. – slovo je ľubovoľný zhluk písmen, nemusí dávať zmysel.

Výsledok. 252

Riešenie. Najskôr sa pozrime na to, koľko slov vedel Paťo napísať, keď začal ľavou rukou. Tieto slová majú tvar $A\bigstar A\bigstar A$, kde $\bigstar$ je písmeno napísané pravou rukou. Na mieste prvej hviezdičky preto môže byť 6 rôznych písmen. Rovnako aj na mieste druhej hviezdičky. Preto máme spolu $6 \cdot 6 = 36$ rôznych slov, keď Paťo začal písať ľavou rukou. Ak sa pozrieme na slová, ktoré Paťo začal písať pravou rukou, dostaneme slová v tvare $\bigstar A\bigstar A\bigstar$. Teraz máme tri hviezdičky a namiesto každej z nich vieme dosadiť jedno zo šiestich písmen. Preto máme spolu $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ rôznych slov, ktoré začína Paťo písať pravou rukou. Spolu je to teda $216 + 36 = 252$ rôznych slov, ktoré Paťo mohol napísať.

Ťažké 2. Koľko rôznych trojíc prirodzených čísel existuje takých, že ich súčet je 11? Trojice sú rovnaké, ak obsahujú rovnaké čísla bez ohľadu na poradie čísel (napr. trojice (1, 1, 9) a (1, 9, 1) nie sú rôzne).

Výsledok. 10

Riešenie. Aby sme sa uistili, že žiadnu trojicu nezarátame dvakrát, budeme uvažovať iba také trojice, ktoré majú čísla zoradené od najväčšieho po najmenšie. Pozrime sa, aké najväčšie môže byť prvé číslo. Keďže zvyšné dve majú byť prirodzené čísla, môžu to byť najmenej 1 a 1, čo znamená, že prvé číslo môže byť najviac 9. To je teda prvá možnosť (9, 1, 1). Ak bude prvé číslo 8, zvyšné dve čísla musia mať súčet 3. To sa dá dosiahnuť iba jedným spôsobom, ak má druhé číslo byť väčšie ako tretie, teda máme druhú možnosť, a to (8, 2, 1). Ak bude na začiatku 7, súčet 4 môžeme dostať dvoma spôsobmi, teda máme ďalšie dve trojice, a to (7, 3, 1) a (7, 2, 2). Ak bude najväčšie z čísel 6, zvyšok musí mať súčet 5, čo dosiahneme dvoma spôsobmi, a to (6, 4, 1) a (6, 3, 2). Najväčšie číslo môže byť aj 5, na zvyšné dve čísla potom máme až tri možnosti: (5, 5, 1), (5, 4, 2) a (5, 3, 3). Posledné číslo, ktoré môže byť na začiatku je 4, potom však súčet 7 môžeme dostať iba jedným spôsobom, teda posledná trojica je (4, 4, 3). Ak by bolo najväčšie číslo 3, súčet zvyšných čísel by mohol byť najviac $3 + 3 = 6$, a teda súčet všetkých troch by nemohol byť 11. A teda hľadaných trojíc je 10.

Ťažké 3. Mali sme 3 sviečky, pričom každá zhorela za iný čas: 60 minút, 80 minút a 100 minút. Naraz horeli všetky sviečky 30 minút. Celkový čas, keď horela len jedna sviečka, je 40 minút. Ako dlho horeli práve 2 sviečky?

Výsledok. 55 minút

Riešenie. Celkový čas, ktorý sviečky dokážu horieť, je $60 + 80 + 100 = 240$ minút. Tento čas sa skladá z troch častí. Je tu zarátaný čas, keď horela jedna sviečka, dvakrát čas, keď horeli dve sviečky a trikrát čas, keď horeli všetky 3 sviečky. Prvý a tretí z týchto časov poznáme, a preto ich môžeme odpočítať a dostaneme $240 - 40 - 3 \cdot 30 = 110$ minút. Preto 110 minút horeli dve sviečky dokopy, a teda každá z nich horela 55 minút.
Teraz sa pozrime na to, ako táto situácia mohla nastať. Ak zapálime všetky tri na 30 minút, zostane nám postupne 30, 50 a 70 minút z pôvodných sviečok. Za tú, ktorá horí 40 minút sama, si vyberieme tú najdlhšiu. Z pôvodných sviečok nám tak zostane 30, 50 a 30 minút. Potom môžeme zapáliť napríklad prvé dve sviečky na 25 minút, potom druhú a tretiu na ďalších 25 minút a nakoniec prvú s treťou na 5 minút.

Ťažké 4. Janka má vo vrecku guľôčky s celými číslami od 1 po 21 (vrátane), pričom každé z čísel je na práve jednej guľôčke. Koľko najmenej guľôčok musí z vrecka vybrať, aby mala istotu, že medzi vybranými guľôčkami sú práve dve také, že súčet čísel na nich je 22?

Výsledok. 12

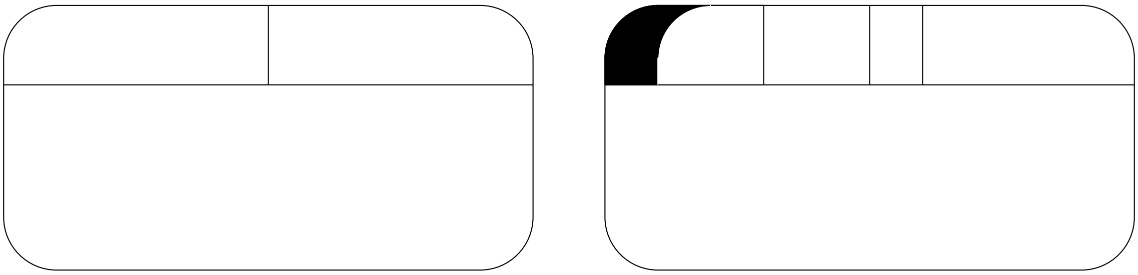
Riešenie. Medzi číslami od 1 do 21 má každé číslo okrem čísla 11 svoju dvojicu, s ktorou dáva súčet 22. To je 10 dvojíc so súčtom 22. Aby Janka nevytiahla dve čísla so súčtom 22, môže z každej z tejto dvojíc vytiahnuť najviac jedno číslo a ešte môže vytiahnuť číslo 11. To dáva spolu 11 guľôčok, čo môže Janka vytiahnuť. Ak Janka vytiahne dvanástu guľôčka, táto guľôčka už určite bude v dvojici s nejakou predchádzajúcou, takže v Jankinom výbere sa určite nájdu dve guľôčky so súčtom 22.

Ťažké 5. Štyria kamaráti sa chcú v kine usadiť do radu s piatimi sedadlami tak, že každý bude sedieť na jednom sedadle a jedno sedadlo ostane voľné. Koľkými spôsobmi to vedia vykonať?

Výsledok. 120

Riešenie. Očíslujme si sedadlá od prvého po piate. Na prvé miesto máme päť možností obsadenia (štyria kamaráti a nikto). Ku každému obsadeniu prvého miesta nám na druhé miesto potom zvýšia len štyri, všetky okrem tej, čo sme využili v prípade prvého miesta (traja kamaráti a nikto (ak sme prvé sedadlo obsadili) alebo štyria kamaráti (ak sme prvé miesto nechali voľné)). Na tretie miesto teda zvyšujú tri možnosti, podobne na štvrté dve a na piate jedna. Spolu je to $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ možností.

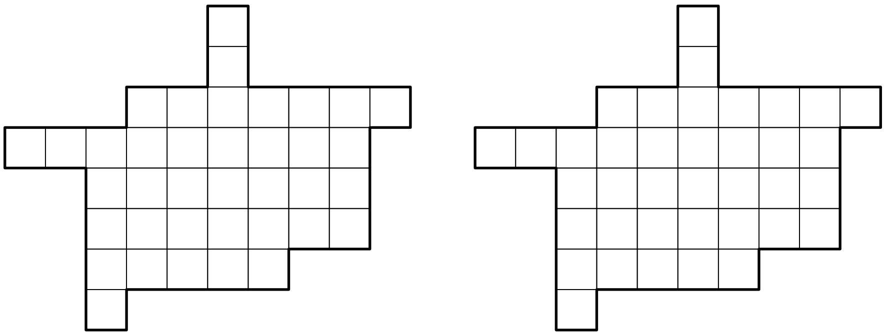
Ťažké 6. Na obrázku je okno električky, ktorého „oblé rohy“ sú štvrťkružnice s polomerom 10 cm. Horné dve časti okna sú posuvné a majú výšku 15 cm. Jedna posuvná časť je dlhá 50 cm. Pri pootvorení okna, ako na obrázku, posunieme okno o 10 cm doprava. Aký je obsah otvorenej plochy okna (na obrázku čiernou farbou)?



Výsledok. 150 cm^2

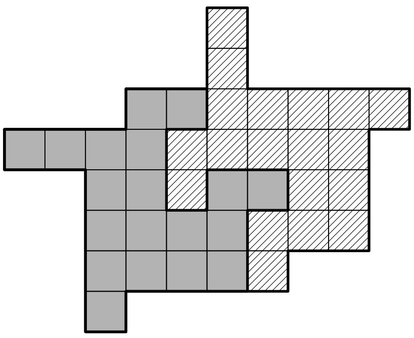
Riešenie. Ak si porovnáme obrázok zatvoreného a pootvoreného okna, vidíme, že na obrázku, v ktorom pribudla čierna plocha, nastal aj prekryv posuvných častí okien. Keďže „rám“ okna (celý obrys obrázku) má plochu rovnakú, čierna plocha musí mať obsah rovnaký ako prekrytá časť okien. Ostáva tak spočítať obsah obdĺžnika, v ktorom sa časti prekrývajú. Je to 15 cm $\cdot$ 10 cm = 150 cm^2.

Ťažké 7. Rozdeľte útvar na obrázku na dva zhodné, pričom každý z nich môže obsahovať len celé štvorčeky.



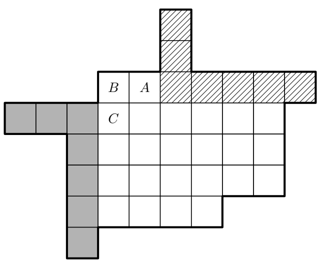
Obrázky máte dva pre prípad, že sa pomýlite.

Výsledok.



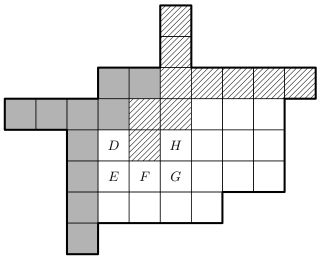
Riešenie.

Najskôr začnime jednoduchým pozorovaním. Útvar zo zadania ma štyri výčnelky. Dva sú krátke, zložené z jednej kocky, a dva sú dlhé, zložené z dvoch kociek. Preto si skúsme prideliť dva z týchto výčnelkov jednému útvaru a dva druhému. Tieto výčnelky môžeme aj spojiť a tak dostaneme útvary na obrázku 1. Takže zatiaľ máme časť sivého útvaru, časť vyšrafovaného útvaru a niektoré políčka sme ešte nepriradili.



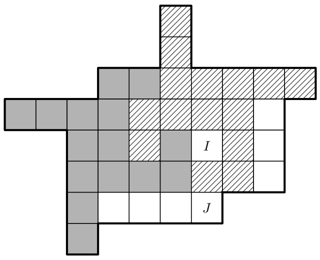
Obrázok 1

Teraz sa pozrime na políčko označené písmenom A. Ak by toto políčko patrilo do vyšrafovaného útvaru, prislúchajúce políčko v sivom útvare by bolo mimo obrázku. Preto toto políčko musí patriť sivému útvaru. Pripojíme ho k sivému



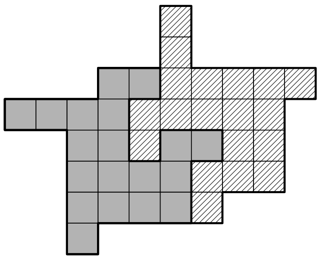
Obrázok 2

útvaru políčkami označenými B a C a k vyšrafovanému útvaru pridáme tiež tri políčka, aby sme získali rovnaké útvary (obrázok 2).
Ďalej sa pozrime na políčka označené písmenami D, E, F, G a H. Ak by ktorékoľvek z týchto políčok patrilo šrafovanému útvaru, prislúchajúce políčka sivého útvaru by boli buď mimo obrázku, alebo by zasahovali do vyšrafovaného útvaru. Preto všetky tieto políčka musia patriť sivému útvaru. Ďalej doplníme vyšrafovaný útvar na rovnaký tvar, aký má sivý útvar a dostaneme tak situáciu na obrázku 3.



Obrázok 3

Políčko označené písmenom I nemôže patriť vyšrafovanému útvaru, a preto patrí sivému útvaru, zatiaľ čo políčko označené písmenom J musí patriť vyšrafovanému útvaru, aby útvary mali rovnaký tvar. Zvyšných 6 políčok je už zjavných. Takto dostaneme dva útvary na obrázku 4, ktoré majú rovnaký tvar a veľkosť.



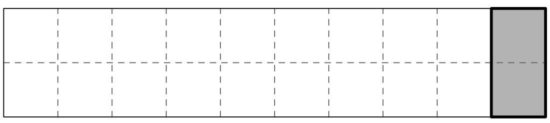
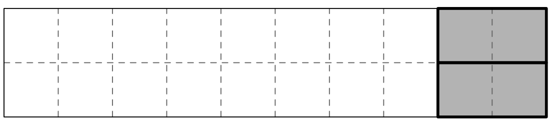
Obrázok 4

Ťažké 8. Námestie má tvar obdĺžnika s rozmermi 2×10 metrov. Koľkými spôsobmi vieme námestie pokryť desiatimi dlaždicami s rozmermi 2×1 meter?

Výsledok. 89

Riešenie. Jeden zo spôsobov riešenia tejto úlohy je vypísanie si všetkých možností. Ak sú všetky dlaždice položené zvislo, máme len jednu možnosť. Ak sú práve dve dlaždice vodorovne, máme 9 možností. Ak sú práve 4 dlaždice vodorovne, máme $7 + 6 + \cdots + 1 = 28$ možností. Takto môžeme pokračovať ďalej, až sa dopracujeme k výsledku. Takýto postup je ale celkom pracný, a preto sa pozrime na postup, ktorým sa dá úloha vyriešiť jednoducho aj pre väčšie námestia.

Pre prehľadnosť si označíme počet všetkých pokrytí námestia tvaru $2 \times n$ ako $p(n)$. Našou úlohou je teraz zistiť, akú hodnotu má $p(10)$ – pre námestie 2×10. Pozrime sa preto, ako mohol byť pokrytý koniec námestia. Na to máme dve možnosti (nasledujúce obrázky). Jedna možnosť je, že na konci sa nachádzala jedna zvislá dlaždica. Druhá možnosť je, že sa tam nachádzajú dve vodorovné dlaždice.

Žiadna iná možnosť nastať nemôže. Teraz môžeme rozobrať tieto dve situácie. Potrebujeme teda zistiť, koľko existuje rôznych pokrytí v prvej situácii. Vieme, že posledná dlaždica je zvislá, a preto potrebujeme pokryť len námestie dĺžky 9. To vieme urobiť $p(9)$ spôsobmi. Podobne v druhej situácii potrebujeme pokryť námestie dĺžky 8. Na to máme $p(8)$ možností. Preto $p(10) = p(9) + p(8)$. Tento argument ale platí pre všetky dĺžky námestia. Preto vieme, že $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$ pre všetky $n > 2$. Ďalej si už len potrebujeme uvedomiť, že $p(1) = 1$ a $p(2) = 2$. Teraz už ľahko dopočítame $p(10)$ ako:

$$\begin{array}{lll}
n = 1 & & p(1) = 1 \\
n = 2 & & p(2) = 2 \\
n = 3 & p(3) = p(2) + p(1) & p(3) = 3 \\
n = 4 & p(4) = p(3) + p(2) & p(4) = 5 \\
n = 5 & p(5) = p(4) + p(3) & p(5) = 8 \\
n = 6 & p(6) = p(5) + p(4) & p(6) = 13 \\
n = 7 & p(7) = p(6) + p(5) & p(7) = 21 \\
n = 8 & p(8) = p(7) + p(6) & p(8) = 34 \\
n = 9 & p(9) = p(8) + p(7) & p(9) = 55 \\
n = 10 & p(10) = p(9) + p(8) & p(10) = 89
\end{array}$$

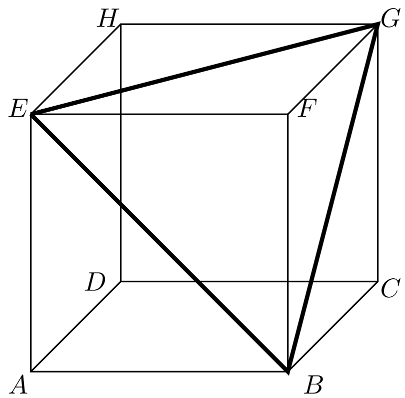
Takto by sme úlohu vedeli jednoducho vyriešiť aj v prípade, ak by námestie bolo dlhšie.

Ťažké 9. Erik si napísal 4 kladné celé čísla. Potom ich po trojiciach posčítaval a dostal výsledky 115, 153, 169, 181. Aké 4 čísla si Erik napísal?

Výsledok. $25, 37, 53, 91$

Riešenie. Erik dostal štyri rôzne súčty, teda musel postupne nasčítavať všetky štyri trojice, ktoré sa z troch čísel dajú vytvoriť. V každej trojici chýba práve jedno číslo, pričom v každej trojici je to iné. Vo všetkých súčtoch dokopy preto použijeme každé z čísel práve trikrát.
Uvedomme si, že ak sčítame všetky štyri súčty zo zadania, dostaneme tak súčty všetkých možných trojíc. Už vieme, že každé číslo sme v súčtoch použili práve trikrát, čo ale znamená, že $115+153+169+181 = 618$ je trojnásobok súčtu všetkých štyroch čísel. Erikove čísla preto spolu dávajú súčet $618 : 3 = 206$. Ostáva si uvedomiť, že ak v prvej trojici dávajú tri čísla 115 a všetky štyri 206, číslo, ktoré chýba v tejto trojici, je $206 - 115 = 91$. Podobne zistíme, že ostatné čísla sú $206 - 153 = 53$, ďalej $206 - 169 = 37$ a nakoniec $206 - 181 = 25$. O správnosti výsledku sa vieme presvedčiť skúškou, teda sčítaním všetkých možných trojíc z čísel 25, 37, 53, 91, pri ktorej dostaneme súčty zo zadania.

Ťažké 10. Na obrázku je kocka $ABCDEFGH$ a v nej vložený trojuholník BEG. Zistite, akú veľkosť má uhol EGB a akú uhol EBG.



Výsledok. Oba majú 60°

Riešenie. Stačí si uvedomiť, že všetky steny kocky sú rovnako veľké. To znamená, že aj ich uhlopriečky sú rovnako dlhé a trojuholník BEG je tvorený tromi takými uhlopriečkami. Jeho strany sú teda rovnako dlhé a musí byť preto rovnostranný. Odtiaľ už úlohu nie je ťažké doriešiť – vieme totiž, že v rovnostrannom trojuholníku sú všetky uhly rovnako veľké a každý z nich má veľkosť 60°. To je zrejme aj prípad uhlov EGB a EBG.

autori:	Tomáš Babej, Žaneta Semanišinová, Florián Hatala, Martin Vodička, Jakub Genči, Roman Staňo, Veronika Hubeňáková, Zuzana Ontkovičová
recenzia a úprava:	Tomáš Kocák, Jana Baranová, Viktória Brezinová, Matej Hanus, Ján Richnavský, Gabriela Genčiová, Jakub Genči, Jakub Farbula, Michal Masrna, Róbert Sabovčík, Martin Mihálik, Florián Hatala, Peter Kovács, Roman Staňo
názov:	**MAMUT – 25. 5. 2018**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
www:	https://malynar.strom.sk/sk/mamut/ http://itakademia.sk/

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk