Košický Matboj

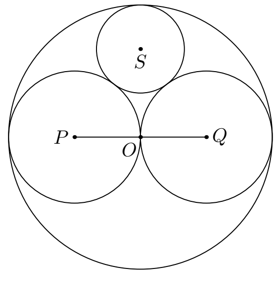
Košice 16. 10. 2015

1.1. Majme ostrouhlý trojuholník ABC taký, že os uhla BAC, výška na stranu b a os úsečky AB sa stretávajú v jednom bode. Určte veľkosť uhla BAC.

1.2. Upratovačka utierala schodisko mrakodrapu. Aby jej práca ubiehala rýchlejšie, počítala umyté schody. Keď mala umytú presne polovicu schodov, urobila si prestávku. Keď sa znovu dala do práce, pomýlila sa a správny trojciferný počet doposiaľ umytých schodov prečítala odzadu, čím jej vzniklo nižšie trojciferné číslo a ďalej počítala od neho. Nakoniec prišla k číslu 746. Koľko najviac schodov mohla umyť?

1.3. Najviac koľko prirodzených čísel menších ako 100 môžeme zobrať, aby ich súčin nebol deliteľný 72?

1.4. Trojuholník má strany dlhé 10, 15 a k, kde k je prirodzené číslo. Koľko existuje prirodzených čísel k takých, že tento trojuholník je tupouhlý?



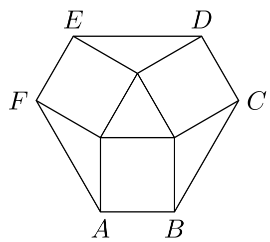
1.5. Majme kružnice o, p, q, s so stredmi v bodoch postupne O, P, Q, S. Zhodné kružnice p a q majú vnútorný dotyk s kružnicou o a vzájomný vonkajší dotyk v bode O (viď obrázok). Kružnica s má vnútorný dotyk s kružnicou o a vonkajší dotyk s kružnicami p a q. Aký veľký je priemer kružnice s, ak $|PQ| = 24$?

1.6. Označme P_n množinu n-ciferných čísel obsahujúcich päťku a Q_n množinu n-ciferných čísel neobsahujúcich päťku. Pre ktoré prirodzené čísla m platí, že P_m má menej prvkov ako Q_m?

1.7. Určte všetky celé hodnoty n také, že hodnoty výrazov $n^2 - 10n + 23$, $n^2 - 9n + 31$ a $n^2 - 12n + 46$ sú prvočísla.

1.8. Nech y a z sú prirodzené čísla také, že $(52 - y \cdot z)/5$ je tiež prirodzené číslo. Nájdite y, z také, že y^z má najväčšiu možnú hodnotu. Ako odpoveď napíšte čísla y a z.

1.9. Na biliardovom stole je čierna a biela guľa (obe nulového polomeru, tzv. hmotné body). Pomocou tága strelíme bielu guľu tak, aby sa päťkrát odrazila od mantinelu, a potom narazila do čiernej gule. Biela guľa sa pohybuje po lomenej čiare, ktorá sa láme iba na mantineloch a to podľa zákonu o uhle odrazu. Biela guľa pritom nesmie spadnúť do dier v rohoch (ktoré sú zanedbateľne malé) a pred piatym odrazom od mantinelu sa nesmie dotknúť čiernej gule. Koľko najviac spôsobov môže existovať, aby sa nám toto podarilo?

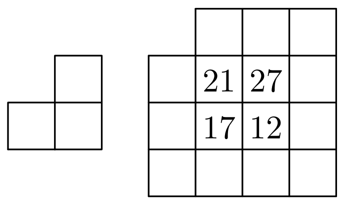


1.10. Janka si nakreslila rovnostranný trojuholník a nad každou jeho stranou zostrojila štvorec. Medzi vrcholmi, ktoré vznikli, dokreslila úsečky tak, aby vznikol šesťuholník $ABCDEF$ (ako na obrázku). Aký obvod má šesťuholník $ABCDEF$, ak vieme, že strana Jankinho trojuholníka je dlhá $\sqrt{3} - 1$?

1.11. Označme a_k číslo, ktoré vznikne napísaním čísel 1 až k za seba (napr. $a_6 = 123456$). Koľko z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ je deliteľných 9?

1.12. Kružnice k, ℓ s priemermi 20, 13 sa pretínajú v bodoch A, B, pričom stred kružnice k neleží vo vnútornej oblasti ℓ a $|AB| = 12$. Na kružnici k je daný bod C tak, že $|AC| = 16$. Označme D druhý priesečník kružnice ℓ a polpriamky CB. Vypočítajte dĺžku CD.

2.1. Z cifier 2, 3, 6, 8, 9 zostavte dve prirodzené čísla tak, aby bol ich súčin maximálny. Každú cifru smiete použiť najviac raz. Ako výsledok zadajte výsledný súčin.



2.2. Do tabuľky na obrázku boli doplnené čísla tak, že súčet čísel v každom trojštvorčeku (bez otáčania) bol rovnaký. Aký je súčet čísel vo veľkej tabuľke?

2.3. Pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C je vpísaný do kružnice s polomerom 4 a stredom S. Dĺžka strany AC je 4. Z vrcholu C vedieme kolmicu na stranu AB a jej pätu označme D. Aká dlhá je úsečka SD?

2.4. Nájdite súčet všetkých prirodzených čísel väčších ako 1000 takých, že každé z nich sa skladá z rôznych párnych cifier (každá cifra sa v každom čísle nachádza najviac raz) a je deliteľné 9.

2.5. Dva trojuholníky so stranami dĺžok 36, 36 a 36 majú spoločnú vpísanú aj opísanú kružnicu. Aký najmenší obsah môže mať spoločná plocha trojuholníkov? Svoju odpoveď môžete ponechať v tvare s odmocninou.

2.6. Vypočítajte ciferný súčet čísla 101^6.

2.7. Nech $M_1, M_2, \ldots, M_5$ sú 5-prvkové množiny a zároveň $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_3 = M_3 \cap M_4 = M_4 \cap M_5 = M_5 \cap M_1 = \emptyset$. Koľko najmenej prvkov môže obsahovať zjednotenie všetkých piatich množín M_i (kde i je 1, 2, 3, 4, 5)?

2.8. Matúš, Peťo a Robčo si chcú kúpiť od Janky veľký zmrzlinový pohár za 11 Jankiných peňazí. Každý z nich

však má len 11 peňazí vlastnej meny. Prevodný kurz je taký, že 11 Matúšových je 15 Jankiných, 11 Peťových je 16 Jankiných a 11 Robčových je 17 Jankiných peňazí. Akou kombináciou mincí majú za zmrzlinový pohár zaplatiť? Samozrejme, chcú za pohár zaplatiť presne (nie viac, ani menej).
Riešenie napíšte v tvare a, M, P, R oddelené čiarkou, kde a je počet riešení a M, P, R sú po poradí počty Matúšových, Peťových a Robčových peňazí v takom riešení, kde $3M + 2P + R$ je minimálne.

2.9. Koľko rôznych prvočísel sa nachádza v prvočíselnom rozklade prirodzeného čísla N, pre ktoré platí, že

$$\log_2(\log_3(\log_5(\ldots \log_p(N)\ldots))) = 2015,$$

kde p je 2015-te prvočíslo v rade $2, 3, 5, \ldots$.

2.10. Máme trojuholník ABC so stranami dĺžky $|AB| = 114$, $|BC| = 25$ a $|AC| = 101$. Na strane AB sa nachádza bod D, pričom $|CD| = 29$. Aký je obsah trojuholníka BDC?

2.11. Koľkými spôsobmi vieme obdĺžnik 3×8 rozdelený na jednotkové štvorčeky pokryť štvorcami 2×2 a obdĺžnikmi 2×1?

2.12. Nech $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 11, \ldots, S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + 111\ldots11$, kde posledný sčítanec obsahuje práve n jednotiek. Nájdite hodnotu

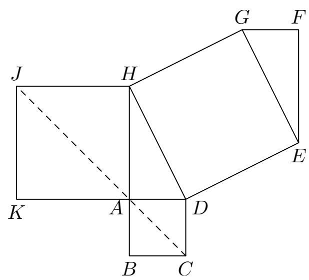
$$\left\lfloor \frac{10^{2017}}{S_{2014}} \right\rfloor.$$

Poznámka: $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť čísla x, teda najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné x.

3.1. Malý jeleník si chce nechať narásť parohy. Funguje to tak, že teraz má len dva konce parohov, pričom každý koniec je hnedý, biely alebo ružový. Ružový koniec za rok dorastie na rozvetvený paroh s dvoma bielymi a jedným hnedým. Hnedý koniec sa za rok rozvetví na jeden hnedý a jeden biely koniec. A biely koniec za rok dorastie na dlhší paroh s ružovým koncom. Jeleník vie, že o 4 roky bude mať menej ako 5 ružových koncov. Tiež vie, že za tejto podmienky bude mať za 4 roky najv??čší možný počet koncov. Aké konce parohov má teraz?

3.2. Nájdite najmenšie prirodzené číslo $x > 100$ také, že pri ľubovoľnom zoradení jeho cifier dostaneme prvočíslo.

3.3. Na obrázku vidíte zhodné pravouhlé trojuholníky ADH a FGE a štvorce $AHJK$, $ABCD$ a $DEGH$. Aký je pomer obsahu štvoruholníka $CDHJ$ k obsahu šesťuholníka $ADEFGH$? Svoju odpoveď uveďte ako zlomok v základnom tvare (t.j. ako podiel dvoch nesúdeliteľných čísel).



3.4. Prvočíselný rozklad prirodzeného čísla C má tri čísla (nie nutne rôzne). Súčet týchto troch čísel je 30. Koľko takých prirodzených čísel C existuje?

3.5. Dva trojuholníky so stranami dĺžok 30, 30 a 36 majú spoločnú vpísanú aj opísanú kružnicu. Aký najmenší obsah môže mať spoločná plocha týchto dvoch trojuholníkov?

3.6. Vyjadrite $3454542/5818176$ ako zlomok v základnom tvare (t.j. ako podiel dvoch nesúdeliteľných čísel).

3.7. Nájdite všetky usporiadané dvojice celých čísel (a, b) také, že existuje nekonečne veľa celých čísel n takých, že číslo $n^4 + 14n^3 + 47n^2 + an + b$ je štvorec (druhá mocnina celého čísla).

3.8. Na stranách BC, AC, AB trojuholníka ABC ležia body K, L, M tak, že úsečky AK, BL a CM sa pretínajú v bode X. Trojuholníky BXM, AXM, AXL majú postupne obsahy 1, 3, 8. Vypočítajte obsah trojuholníka CXL.

3.9. Máme niekoľko krabíc a niekoľko guľôčok (niekoľko znamená aspoň jeden kus). Ak dáme do každej krabice práve jednu guľôčku, zvýši sa nám n guľôčok. Ak by sme dali n krabíc bokom, môžeme do zvyšných krabíc rozmiestniť všetky guľôčky tak, že do každej dáme práve n. Koľko môžeme mať guľôčok? Nájdite všetky možnosti.

3.10. Nájdite všetky prirodzené čísla n s vlastnosťou, že ak $n!$ končí na k núl, tak $(2n)!$ končí na $3k$ núl.

3.11. Označme a_k číslo, ktoré vznikne napísaním čísel 1 až k za seba (napr. $a_6 = 123456$). Koľko z prvých 2015 členov postupnosti $a_{a_1}, a_{a_2}, \ldots$ je deliteľných 9?

3.12. Polynóm tretieho stupňa spĺňa podmienku, že $|p(1)| = |p(2)| = |p(3)| = |p(5)| = |p(6)| = |p(7)| = 12$. Vypočítajte hodnotu $|p(0)|$.

Výsledky:

1.1. $60°$ **1.2.** 1142 **1.3.** 67 **1.4.** 12 **1.5.** 16 **1.6.** 1, 2, 3, 4, 5, 6 **1.7.** 3, 7 **1.8.** $y = 3, z = 14$ **1.9.** 20 **1.10.** 6 **1.11.** 447 **1.12.** $84/5 = 16.8$

2.1. 80166 $(= 862 \cdot 93)$ **2.2.** 262 **2.3.** 2 **2.4.** 115992 **2.5.** $216\sqrt{3} = 374{,}12$ **2.6.** 28 **2.7.** 13 **2.8.** 1, 7, 1, 0 **2.9.** 1 **2.10.** 360 **2.11.** 1037 $(= 29^2 + 4 \cdot 7^2)$ **2.12.** 8100

3.1. jeden hnedý a jeden biely **3.2.** 113 **3.3.** 1/2 **3.4.** 2 **3.5.** 432 **3.6.** 19/32 **3.7.** (-14, 1) **3.8.** 16 **3.9.** $8, 9$ **3.10.** $1, 2, 8, 9, 13, 14$ **3.11.** 447 **3.12.** 72

STROM

http://www.strom.sk
http://seminar.strom.sk
http://seminar.strom.sk/sk/matboj

http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta
http://skoly.science.upjs.sk
http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/informacie-pre-zaujemcov-o-studium

Aktivity Združenia STROM finančne podporila

NADÁCIA | Allianz