Košický matboj, 29. 4. 2011, 1. časť

1.1. Nájdite počet riešení rovnice
$$x^2 - 3|x| + 2 = 0,$$
kde x je reálne číslo.
Symbolom $|x|$ označujeme absolútnu hodnotu čísla x, pre $x \geq 0$ je $|x| = x$, pre $x < 0$ je $|x| = -x$.

1.2. V štvorci $ABCD$ máme bod P taký, že jeho vzdialenosť od strany CD je 5 a taktiež platí $|PA| = |PB| = 5$. Určte $|AB|$.

1.3. Aké najmenšie prirodzené číslo sa dá zapísať ako súčin $p^r q^q r^p$, kde p, q, r sú rôzne prvočísla?

1.4. Máme obdĺžnik $ABCD$ so stranami $|AB| = 2$ a $|BC| = 3$. Bod E je na strane BC tak, že $|BE| = 1$. Bod F je stred strany CD. Určte súčet veľkostí uhlov DFA a CFE.

1.5. Alica myslí na jednu zo svojich 16 knižiek a Bob chce uhádnuť, na ktorú. Napíše niekoľko otázok na papier, Alica mu k nim dopíše odpovede (iba áno/nie) a vráti mu papier. Najmenej koľko otázok musí Bob napísať, aby mal vždy istotu, že na základe odpovedí bude vedieť určiť knihu, na ktorú Alica myslí?

1.6. Napíšte všetky usporiadané dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave $x^2 - xy = -12$, $y^2 - xy = 28$.

1.7. Aké najmenšie číslo môžeme dosadiť za x, aby nerovnosť $a \geq 14\sqrt{a} - x$ platila pre všetky nezáporné čísla a?

1.8. Nájdite počet nezáporných celočíselných trojíc x, y, z, ktoré sú riešeniami rovnice $x+y+z = 12$.

1.9. V rovine ležia 4 rôzne body A, B, C a D, pričom platí $|AB| = |BC| = |AC| = |CD| = 10$ a $|AD| = 17$. Aké hodnoty môže nadobúdať $|\sphericalangle ADB|$?

1.10. Vypočítajte obsah kosoštvorca $ABCD$, ak viete, že polomery opísaných kružníc trojuholníkom ABC a ABD sú 12,5 a 25.

1.11. Trojuholník XYZ má dĺžky strán 3, 4, 5. Bod P je taký bod, pre ktorý platí $|\sphericalangle XPY| = |\sphericalangle YPZ| = |\sphericalangle ZPX|$. Označme vzdialenosti bodu P od bodov X, Y a Z ako k, ℓ, m. Určte hodnotu $k^2 + \ell^2 + m^2$.

1.12. V jednom rade stojí 2011 guľôčok. Každá z nich má čiernu alebo bielu farbu. Pre každú guľôčku zistíme súčet počtu bielych guľôčok nachádzajúcich sa napravo od nej a počtu čiernych guľôčok nachádzajúcich sa naľavo od nej. Dostaneme tak 2011 súčtov. Medzi týmito súčtami sa práve jedno číslo vyskytuje nepárny počet ráz. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať toto číslo.

Košický matboj, 29. 4. 2011, 2. časť

2.1. Včera, deň pred MS v HOKEJI 2011 IIHF o 16 : 00, sa nabudený fanúšik pozrel na časomieru, ktorá odpočítava čas do začiatku MS. Ostávalo presne 23 : 52 : 35. Všimol si, že prvé tri cifry sú rovnaké ako posledné tri. Zamyslel sa a uvedomil si, že sa to do začiatku MS ešte niekoľkokrát zopakuje. Koľkokrát?

2.2. Na klasickej šachovnici 8×8 na políčku D5 máme upraveného koňa, ktorý sa síce pohybuje do L-ka, ale prejde tri políčka jedným a dve druhým smerom. Najmenej koľko ťahov potrebuje, aby sa dostal na susedné políčko?
Poznámka: z políčka D5 sa kôň vie dostať na políčka A3, A7, B2, B8, F2, F8, G3 a G7.

2.3. Find the smallest integer x greater than 2011 such that $x = n(n+4)(n+8)$ for some integer n.

2.4. Marek a Janka hrali hru, v ktorej vždy niekto vyhral (nemohla skončiť remízou). Dohodli sa, že budú hrať o cukríky a porazený si vždy vezme y cukríkov a víťaz x cukríkov, pričom $x > y \geq 1$. Po niekoľkých kolách mala Janka 30 cukríkov a Marek, ktorý vyhral len dve hry, 25 cukríkov. Koľko cukríkov dostal víťaz po každom kole, ak obaja začínali bez cukríkov?

2.5. Dva zhodné kruhy sú vystrihnuté zo štvorca so stranou dĺžky 1. Aký je ich najväčší možný polomer?

2.6. Trojuholníky OAB a OPQ sú podobné. Ak $\frac{|OA|}{|OQ|} = 2$ a $\frac{|OB|}{|OP|} = 3$, čomu je potom rovné $\frac{|AB|}{|PQ|}$?

2.7. V pravidelnom deväťuholníku $ABCDEFGHI$ sa uhlopriečky AD a BI pretínajú v bode J. Určte veľkosť uhla BJD.

2.8. Nájdite všetky celé čísla x, pre ktoré sú obe čísla $(x-3)^2 - 2$ aj $(x-7)^2 + 1$ prvočísla.

2.9. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že každý zo zlomkov

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \ldots, \frac{31}{n+33}$$

je v základnom tvare (nedá sa skrátiť).

2.10. Robčo a Mazo hrajú ping-pong. Hoci Mazo je o niečo lepší a pravdepodobnosť, že dá bod, sú 3/5, Robčovi sa podarilo držať s ním krok a momentálny stav tohto setu je 10 : 10. Teda vyhrá ten z nich, ktorý od tohto okamihu bude viesť o dva body. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá Mazo?

2.11. Majme trojuholník ABC taký, že $|AB| = 8$, $|\sphericalangle CAB| = 30°$ a $|\sphericalangle ABC| = 45°$. Zostrojme bod D, ktorého vzdialenosť od strany BC bude 1 a od strany AC tiež 1. Aká je vzdialenosť bodu D od strany AB?

2.12. Určte $\sqrt{1+1+\frac{1}{4}} + \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$. Výsledný výraz zjednodušte.

Košický matboj, 29. 4. 2011, 3. časť

3.1. Zistite poslednú cifru čísla $999^{999} + 1$ v desiatkovej sústave.

3.2. Nájdite najmenšie kladné celé číslo k také, že 1000000 delí $k!$.
Symbolom $k!$ označujeme súčin všetkých kladných celých čísel menších alebo rovných k.

3.3. Na otázku, kto z káčerovcov je najvyšší, traja bratia odpovedali takto:
Hui: „Ja nie!"
Dui: „Ja!"
Lui: „Dui to nie je!"
Z troch súrodencov káčerovcov vždy dvaja klamú a tretí hovorí pravdu, nevieme však, ktorý. Kto z nich je najvyšší?

3.4. Obsahy troch zo šiestich stien kvádra sú $5\sqrt{6}$, $2\sqrt{15}$ a $3\sqrt{10}$. Aký je objem tohto kvádra?

3.5. Do kruhu sa postavilo 13 chlapcov a 9 dievčat a chytili za ruky svojich susedov. Chlapec s chlapcom sa držali c-krát, dievča s dievčaťom sa držali d-krát. Aký môže byť rozdiel $c - d$? Určte všetky možnosti.

3.6. Obdĺžnik $PQRS$ je vpísaný do trojuholníka ABC tak, že RS leží na strane BC a dĺžka PS je tretina výšky na stranu BC. Určte $S_{PQRS} : S_{ABC}$.

3.7. Uvažujme štvorsten, ktorého päť hrán má veľkosť 1. Akú veľkosť má mať jeho šiesta hrana, aby povrch tohto štvorstena bol maximálny?

3.8. Dvaja matematici, Peter a Ján, hrajú spoločenskú hru. Počítač vyberá nejaké tajné kladné celé číslo $n < 60$ (obidvaja Peter i Ján vedia, že $n < 60$, ale nevedia presnú hodnotu n). Počítač oznámi Petrovi číslicu na mieste jednotiek v čísle n a Jánovi počet kladných deliteľov čísla n. Potom Peter a Ján viedli nasledovný rozhovor:
Peter: „Neviem, koľko je n, ale viem, že ty to tiež nevieš. Avšak viem, že n je deliteľné minimálne dvomi rôznymi prvočíslami."
Ján: „Oh, potom ja viem, koľko je n."
Peter: „Teraz už tiež viem, koľko je n."
Ak obaja hovoria pravdu, aké sú všetky možné hodnoty čísla n?

3.9. Počet kladných deliteľov čísla $55n^3$ je 55 (vrátane 1 a seba samého). Koľko kladných deliteľov má číslo $7n^7$?

3.10. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n tak, aby platilo nasledujúce tvrdenie: ak v rovine ľubovoľne rozmiestnime n bodov a žiadne tri z daných n bodov neležia na priamke, tak existuje konvexný štvoruholník, ktorý má vrcholy v 4 z daných n bodov.

3.11. Koľko existuje trojíc prirodzených čísel x, y, z, pre ktoré platí, že $x \le y \le z$ a $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{3}$?

3.12. Nech $a_0 = 6$, $a_1 = 7$, $a_2 = 47$ a pre $n \ge 0$ platí:

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n.$$

Vypočítajte 2011−ty člen tejto postupnosti.

Riešenia

1.1 4

1.2 8

1.3 $21600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

1.4 $135°$

1.5 4

1.6 $(3, 7)$ a $(-3, -7)$

1.7 49

1.8 $\binom{14}{2} = 91$

1.9 $30°$

1.10 400

1.11 $25 - 4\sqrt{3}$

1.12 1005

2.1 95

2.2 5

2.3 $2520 = 10 \cdot 14 \cdot 18$

2.4 8

2.5 $1 - \sqrt{2}/2$, resp. $1/\left(2 + \sqrt{2}\right)$

2.6 $\sqrt{6}$

2.7 $60°$

2.8 1, 5, 6, 8

2.9 35

2.10 $9/13$

2.11 $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 4$

2.12 $\frac{n\cdot(n+2)}{n+1}$

3.1 0

3.2 25

3.3 Hui

3.4 30

3.5 4

3.6 $4 : 9$

3.7 $\sqrt{2}$

3.8 10

3.9 $352 = 2 \cdot 22 \cdot 8$

3.10 5

3.11 6

3.12 $7 \cdot 3^{2011} - 5 \cdot 2^{2011} - 4$

Aktivita je podporená z grantu APVV LPP–0057–09
Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Košický matboj, 29. 4. 2011, riešenia 1. časti

Škola .... **Družstvo** .... **Číslo družstva** ....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

1.1. ....

1.2. ....

1.3. ....

1.4. ....

1.5. ....

1.6. ....

1.7. ....

1.8. ....

1.9. ....

1.10. ....

1.11. ....

1.12. ....

Príklady .... **Opravoval** ....

Košický matboj, 29. 4. 2011, riešenia 2. časti

Škola .... **Družstvo** .... **Číslo družstva** ....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

2.1. ....

2.2. ....

2.3. ....

2.4. ....

2.5. ....

2.6. ....

2.7. ....

2.8. ....

2.9. ....

2.10. ....

2.11. ....

2.12. ....

Príklady .... **Opravoval** ....

Košický matboj, 29. 4. 2011, riešenia 3. časti

Škola .... **Družstvo** .... **Číslo družstva** ....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

3.1. ....

3.2. ....

3.3. ....

3.4. ....

3.5. ....

3.6. ....

3.7. ....

3.8. ....

3.9. ....

3.10. ....

3.11. ....

3.12. ....

Príklady .... **Opravoval** ....