Košický matboj, 25. 4. 2008, 1. časť

1.1. Písmená nahraďte ciframi (rovnaké rovnakými, rôzne rôznymi) tak, aby platila rovnosť:

$$LIK \times LIK = BUBLIK$$

Akú hodnotu môže mať písmeno U?

1.2. Aký najväčší počet číslic môže mať číslo, v ktorom každá dvojica susedných číslic tvorí druhú mocninu prirodzeného čísla?

1.3. Hra "Námorná bitka" sa hrá v štvorci 7×7. Aký je najmenší nutný počet výstrelov, aby sme zaručene zasiahli 4-tonovú loď, keď vieme, že má tvar obdĺžnika 1×4.

1.4. V dedine býva 50 bohatých ľudí, všetci ostatní sú chudobní. 10 % chudobných obyvateľov tejto dediny si o sebe myslí, že sú bohatí a 10 % bohatých sa považuje za chudobných. Posledný prieskum ukázal, že 20 % obyvateľov si o sebe myslí, že sú bohatí. S akou pravdepodobnosťou bude náhodne vybraný občan tejto obce chudobný?

1.5. Koľko je takých prirodzených čísel n, pre ktoré aj čísla $\frac{21n-3}{4}$ a $\frac{15n+2}{4}$ sú prirodzenými číslami.

1.6. Štvorec $ABCD$ je nakreslený tak, že vrchol A je na osi y, B na osi x, a vrchol C v bode $(13, 8)$. Aký je obsah štvorca?

1.7. Nájdite najväčšie prirodzené číslo, ktoré nemôžeme získať ako súčet ľubovoľného počtu čísel 5 a ľubovoľného počtu čísel 11.

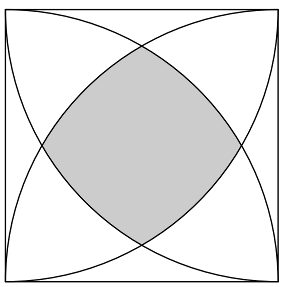
1.8. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré číslo $1! + 2! + \cdots + n!$ je štvorcom prirodzeného čísla.

1.9. Aká je posledná nenulová číslica čísla $42! = 1.2.\cdots.42$?

1.10. Nech $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{20}$ je usporiadanie čísel $1, 2, 3, \ldots 20$. Aká je najväčšia hodnota sumy

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \cdots + |a_{20} - 20|?$$

1.11. Stále sa ponáhľajúci pán stúpal rýchlosťou jedného schodu za sekundu po pohyblivom schodišti, ktoré sa taktiež pohybovalo smerom hore. Po dvadsiatich krokoch na takto "vylepšenom" schodisku býval tento pán hore. Jedného dňa mal však naozaj naponáhlo a stúpal po schodišti, ktoré sa pohybovalo smerom hore, po dvoch schodoch, čiže za každú sekundu zdolal dva schody. Na vrchol schodišťa sa tak dostal po prekonaní 32 schodov. Koľko schodov malo toto pohybujúce sa schodisko zdola až nahor?



1.12. Aký obsah má vyšrafovaná časť na obrázku, ak strana štvorca má 1 cm?

Košický matboj, 25. 4. 2008, 2. časť

2.1. Robko si nechal preplatiť šek na x dolárov a y centov. Omylom mu vyplatili y dolárov a x centov. Bolo to presne o dva centy viac ako je dvojnásobok správnej sumy. Na akú čiastku bol šek vystavený? (Jeden dolár má 100 centov.)

2.2. Štvorec 4×4 je rozdelený na 16 jednotkových štvorcov. Koľko pravouhlých štvoruholníkov je vytvorených z týchto jednotkových štvorcov?

2.3. Napíšme číslo $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{2008^2})$ ako zlomok v základnom tvare. Aký je súčet čitateľa a menovateľa tohto zlomku?

2.4. Nájdite posledné dve cifry čísla 2^{2008}.

2.5. Tridsiati študenti z piatich ročníkov vymysleli 40 úloh na matematickú olympiádu. Pritom spolužiaci vymysleli vždy ten istý počet úloh, každý študent vymyslel aspoň jeden príklad a študenti z rôznych ročníkov rôzny počet príkladov. Koľko bolo tých študentov, ktorí vymysleli práve jednu úlohu?

2.6. Nájdite najmenšie kladné prirodzené číslo n s touto vlastnosťou: Číslo $\frac{n}{2}$ je druhá mocnina, $\frac{n}{3}$ tretia mocnina a $\frac{n}{5}$ piata mocnina prirodzeného čísla.

2.7. Pre ktoré n existujú kladné reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré spĺňajú rovnosti:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3$$

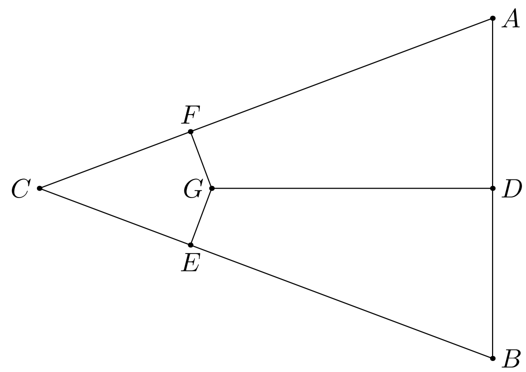
2.8. Ak spojíme priesečníky $xy = 12$ a $x^2 + y^2 = 25$, aký útvar dostaneme?

2.9. Nájdite najväčšie 7-ciferné číslo, ktoré je deliteľné číslami 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15

2.10. Dĺžky strán trojuholníka sú tri za sebou idúce čísla. Ak najväčší uhol je dvojnásobok najmenšieho, určte dĺžky strán tohoto trojuholníka.

2.11. Súčet troch čísel je 9. Pomer prvého ku druhému je $\frac{2\sqrt{15}+3}{17}$ a pomer druhého k tretiemu je $36\sqrt{5} - 18\sqrt{3} + 80 - 8\sqrt{15}$. Aká je hodnota druhého čísla?

2.12. Majme trojuholník ABC, v ktorom sú zakreslené body D, E, F, G ako na obrázku. Platí $|FG| + |EG| = |DG|$, $|EG| + |DG| = |DA| = 2|EC| = |AF| - |FG|$. Taktiež $|\sphericalangle ADG| = |\sphericalangle AFG| = |\sphericalangle BEG| = 90°$. Určte pomer $|FC| : |EG|$.



Košický matboj, 25. 4. 2008, 3. časť

3.1. Ak súčet prvých $3n$ za sebou idúcich prirodzených čísel je o 150 väčší ako súčet prvých n za sebou idúcich prirodzených čísel, aký je súčet prvých $4n$ za sebou idúcich prirodzených čísel?

3.2. Koľkokrát za deň utvoria hodinové ručičky (minutová a hodinová) pravý uhol?

3.3. Dva stĺpy majú výšku 10 a 5 metrov a ich vodorovná vzdialenosť je 36 metrov. Z vrcholu každého stĺpa je natiahnutý kábel k bodu P, ktorý leží na zemi medzi nimi. Bod P je umiestnený tak, aby celková dĺžka kábla bola čo najmenšia. Aká je celková dĺžka kábla?

3.4. Napíšeme čísla 1,2, ..., 1 000 000 000. Potom každé z nich nahradíme súčtom jeho cifier. Túto operáciu opakujeme tak dlho, dokiaľ všetky čísla v postupnosti nebudú jednomieste. Ktorých čísel je v tej postupnosti najviac?

3.5. Zuzka si napísala všetky trojciferné čísla zložené len z nepárnych cifier. Aký bol súčet týchto čísel?

3.6. Nájdite všetky celočíselné riešenia rovností

$$x + y + z = 3, \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

3.7. Koľko celočíselných riešení má rovnica $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$?

3.8. Nech p, q, r, s, t sú čísla 1, 2, 3, 4, 5 ale nie nutne v tomto poradí. A nech

$$x = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t}}}}}$$

Aká je hodnota t ak sme hodnoty p, q, r, s zvolili tak, aby x bolo čo najväčšie.

3.9. Mestská rada má 9 členov, ktorí slúžia v rôznych výboroch. Každý výbor má troch členov a žiadny dvaja členovia nie sú spolu vo viac ako jednom výbore. Aký je najväčší možný počet výborov?

3.10. Pre ktoré reálne hodnoty konštanty c existuje dvojica reálnych čísel x, y spĺňajúca nasledujúce podmienky: $2x + y < 5$; $x - y < 7$; $4x - y > 4$; $x + y = c$

3.11. V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ zostrojíme všetky jeho uhlopriečky a v jeho vnútri dostaneme päťuholník $PQRST$. V akom pomere sú obsahy týchto päťuholníkov? ($\cos 36 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$)

3.12. Najmenej koľko bodov treba vyznačiť vo vnútri konvexného 10-uholníka, aby každý trojuholník s vrcholmi vo vrcholoch 10-uholníka obsahoval vo svojom vnútri aspoň jeden vyznačený bod (za vnútro útvaru sa nepovažujú jeho strany)?

Riešenia

1.1 4

1.2 5

1.3 12

1.4 7/8

1.5 0

1.6 89

1.7 39

1.8 1, 3

1.9 4

1.10 200

1.11 80

1.12 $1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ cm

3.1 300

3.2 44

3.3 39

3.4 1

3.5 69 375

3.6 $[1, 1, 1], [4, 4, -5], [4, -5, 4], [-5, 4, 4]$

3.7 15

3.8 3

3.9 12

3.10 $c \in (-9, \frac{7}{2})$

3.11 $\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \simeq 6,85$

3.12 8

2.1 32 dolárov, 65 centov

2.2 100

2.3 6 025

2.4 56

2.5 26

2.6 $2^{15}3^{10}5^{6}$

2.7 2, 3

2.8 obdĺžnik

2.9 9 999 900

2.10 4, 5, 6

2.11 $4\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

2.12 3/2