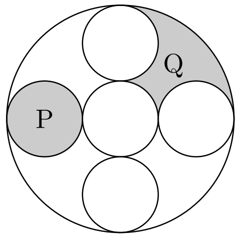
Prešovský matboj, 3. 12. 2004, 1. časť

1.1. Zuzka má 12 zápaliek dĺžky 1. Použitím všetkých chce vytvoriť pravidelný mnohouholník tak, aby celé zápalky tvorili časti strán alebo uhlopriečok daného mnohouholníka. Zápalky však nemôže dávať cez seba, tak aby sa prekrývali. Aký je najmenší obsah mnohouholníka, ktorý môže Zuzka vytvoriť?

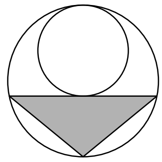
1.2. Tridsať percent žiakov si myslí, že $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$. Samozrejme, je to zle. Existuje však dvojica reálnych čísel a, b, pre ktorú by platilo : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}$? Ak áno, uveďte aspoň jednu takúto dvojicu.



1.3. Nech P a Q označujú obsahy vyšrafovaných oblastí podľa obrázka. Všetky kružnice, ktoré ležia vnútri veľkej kružnice majú rovnaký polomer. Aký je vzťah medzi P a Q ($>$, $<$, $=$)?

1.4. Nech $\alpha(n)$ označuje najmenší možný počet farieb, ktorými je možné ofarbiť šachovnicu $n \times n$ tak, aby v žiadnom riadku, stĺpci ani na (hlavných) diagonálach neboli dve políčka rovnakej farby. Aká je hodnota $\alpha(1)+\alpha(2)+$ $+\alpha(3)+\alpha(4)$?

1.5. Dve steny a strop miestnosti sa stretávajú (pod pravými uhlami) v bode P. Mucha je v miestnosti vo vzdialenosti 1m od jednej steny, 8m od druhej steny a 9m od bodu P. Aká je jej vzdialenosť od stropu?



1.6. Na obrázku má väčšia kružnica polomer 3 a tá menšia vnútri nej 2. Vypočítajte obsah vyšrafovaného rovnoramenného trojuholníka.

1.7. How many ordered triples (x, y, z) of positive integers satisfy the equality $(x^y)^z = 64$?

1.8. Nech Máte šachovnicu 10×10 políčok. Najprv do každého políčka vpíšete čísla po riadkoch, t.j. do prvého riadku zľava doprava 1, 2, 3, …, 10, do druhého 11, 12, …, 20, až do políčka vpravo dole vpíšete 100. Potom napíšete do týchto políčok čísla po stĺpcoch, t.j. do prvého stĺpca zhora nadol 1, 2, 3, …, 10, do druhého 11, 12, …, 20, až do políčka vpravo dole vpíšete 100. Koľko bude takých políčok, v ktorých súčet čísel do nich vpísaných je 101?

1.9. Označme si čísla a, b nasledovne. Nájdite najbližšie prirodzené číslo k číslu $a-b$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{1001^2}{2001}\ , \\ b &= \frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{1001^2}{2003}\ . \end{aligned}$$

1.10. Janko vybral z množiny čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ päť čísel. Keď povedal Marienke ich súčin, Marienka nevedela zistiť, či je ich súčet párny alebo nepárny. Aký je súčin týchto čísel?

1.11. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel m, n ($n \geq m$), takých, že obdĺžnik veľkosti $m \times n$ nemožno rozdeliť na obĺžniky veľkosti 2×5 a 1×3.

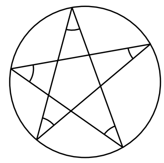
1.12. Nájdi všetky celočíselné riešenia (a, b) rovnice $a^2 = b^3 + 1$.

Prešovský matboj, 3. 12. 2004, 2. časť

2.1. Jedna odvesna pravouhlého trojuholníka je o dva metre dlhšia ako dvojnásobok druhej. Prepona je o štyri metre kratšia ako súčet dĺžok oboch odvesien. Určte obvod trojuholníka v metroch.

2.2. Predstavte si, že guľu G vložíme do valca V takého, ktorý sa bude dotýkať gule oboma podstavami a priemer podstavy bude priemerom gule. Do valca V zostrojíme kužeľ K, ktorý má s valcom V rovnakú podstavu aj výšku. (Takéto čudo vraj mal na náhrobku Archimedes). Aký je pomer objemov telies $G : V : K$?

2.3. Aký je súčet piatich uhlov vyznačených na obrázku?



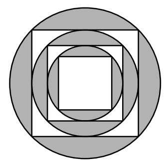
2.4. Abeceda gumkáčov obsahuje 16 rôznych písmen. Skupinka písmen je slovom, ak obsahuje práve štyri písmená, pričom je známe, že na prvom a poslednom mieste sa v žiadnom slove nevyskytujú rovnaké písmená a neexistuje slovo, ktoré by obsahovalo aspoň tri rovnaké písmená. Koľko slov je v slovníku gumkáčov?

2.5. Funkcia f je daná tabuľkou

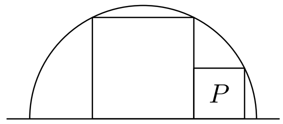
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Ak $u_0 = 4$ a pre každé celé číslo $n \geq 0$ platí $u_{n+1} = f(u_n)$, aká je hodnota u_{2004}?

2.6. Vpíšeme do kružnice s polomerom 1 štvorec a vyšrafujeme plochu medzi nimi. Do neho potom vpíšeme kružnicu, do ktorej znova vpíšeme štvorec a vyšrafujeme plochu medzi nimi. Tento postup opakujeme stále dookola (nekonečne veľa krát). Aký bude celkový obsah vyšrafovanej plochy?



2.7. Two squares are inscribed into the halfcircle (see picture). Determine the area of the great square if you know that the area of the small one is P.



2.8. Súčin piatich prvočísel je šesťciferné číslo $\overline{ABCABC}$, kde A, B a C sú cifry. Viete, že jedno z tých piatich prvočísel je 491. Zistite A, B a C.

2.9. Výšky trojuholníka majú veľkosti 12, 15, 20. Aký je najväčší uhol takéhoto trojuholníka?

2.10. Nájdite najväčšie prirodzené číslo x, ktoré vyhovuje rovnici

$$6(x-5)^2 = 5(x-5)\sqrt{x+15} + x + 15.$$

2.11. Koľko najviac vrcholov môže mať mnohouholník, ktorý vznikne rezom pravidelného dvanásťstena rovinou?

2.12. Nájdite všetky polynómy $P(x)$, ktoré spĺňajú rovnicu

$$1 + P(x) = \frac{1}{2}\left(P(x-1) + P(x+1)\right).$$

Prešovský matboj, 3. 12. 2004, 3. časť

3.1. Hádžeme dvoma kockami. Aká je pravdepodobnosť, že padnú dve čísla, ktorých súčet je deliteľný piatimi?

3.2. Súčet jedenástich po sebe idúcich celých čísel je 2002. Aké je najmenšie z týchto čísel?

3.3. Majme postupnosť čísel, ktorej prvý člen je 2004. Druhý člen dostaneme ako podiel prvého člena a čísla o jedno väčšieho. Tretí člen takisto dostaneme ako podiel hodnoty druhého člena a čísla o 1 väčšieho. Postupne takto vytvoríme postupnosť čísel, z ktorých každé nasledujúce je podielom predchádzajúceho člena a čísla o 1 väčšieho. Určte 2004-tý člen tejto postupnosti.

3.4. Nech AB je úsečka dĺžky 26 a na nej ležia body C a D tak, že $|AC| = 1$ a $|AD| = 8$. Body E a F vzniknú ako priesečníky kolmíc na úsečku AB z bodov C a D s polkružnicou s priemerom AB. Zistite veľkosť $|EF|$.

3.5. Označme $x(a, b, c)$ počet násobkov čísla a, ktoré sú väčšie ako b a menšie ako c. Napr. $x(2, 5, 11) = 3$, lebo medzi 5 a 11 sú tri násobky čísla 2. Zistite $x(9^3, 9^4, 9^6)$.

3.6. V dlhej chodbe sa nachádza 1000 izieb v jednom rade za sebou. Na začiatku sa v prvej izbe nachádza 1000 ľudí a ostatné sú prázdne. Každú minútu sa stane: v každej izbe, v ktorej sa nachádza viac ako jeden človek, sa rozhodne jeden z nich, že táto izba je preplnená a presunie sa do nasledujúcej izby. V každej minúte sa môže jeden človek premiestniť maximálne raz a všetci sa každú minútu presúvajú naraz. Koľko izieb bude po jednej hodine prázdnych?

3.7. What is the smallest integer n for which any subset of $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ of size n must contain two numbers that differ by 8?

3.8. Vypočítajte hodnotu čísla

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2\cdot3\cdots2005} + \frac{2}{3\cdot4\cdots2005} + \cdots + \frac{2004}{2005}\right)}.$$

3.9. Vrchol E štvorca $EFGH$ je aj stredom štvorca $ABCD$. Dĺžka strany štvorca $ABCD$ je 1 a dĺžka strany štvorca $EFGH$ je 2. Strana EF pretína CD v bode I a EH pretína AD v bode J, $|\sphericalangle EID| = 60°$. Aký je obsah štvoruholníka $EIDJ$?

3.10. Množina $\mathcal{M}$ obsahuje 2004 nie nutne rôznych celých čísel. Množina $\mathcal{M}$ má tú vlastnosť, že ak do nej patria čísla a, b, c, tak do nej patrí aj číslo $a + b - c$. Zistite, aké najväčšie číslo môže byť v množine $\mathcal{M}$, ak viete, že súčet všetkých čísel množiny $\mathcal{M}$ nepresahuje 1 000 000.

3.11. Reálne čísla a, b a c spĺňajú rovnosti $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ a $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Nájdite všetky možné hodnoty $a + b + c$.

3.12. Majme 1000 malých kociek očíslovaných od 1 do 1000. Poskladáme z nich veľkú kocku $10 \times 10 \times 10$. Dvaja červíci vyštartujú z jedného rohu kocky do protiľahlého. Každý z nich sa môže pohybovať iba cez steny malej kocky. Prvý červík môže prejsť iba do malej kocky s číslom, ktoré sa líši od čísla kocky, v ktorej sa nachádza, o osem. Druhý, ak sa líšia o deväť. Možno z malých kociek nejako poskladať veľkú kocku tak, aby sa mohli obaja červíci dostať do protiľahlého rohu?

Riešenia

1.1 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

1.2 neexistuje

1.3 $P = Q$

1.4 14

1.5 4

1.6 $4\sqrt{2} = 2\sqrt{8}$

1.7 9

1.8 10

1.9 501

1.10 420

1.11 $(2,2), (2,4), (4,4), (2,7), (1,3k+1), (1,3k+2)$

1.12 $(3,2), (-3,2), (1,0), (-1,0), (0,-1)$

2.1 30

2.2 $2:3:1$

2.3 $180°$

2.4 60 960

2.5 4

2.6 $2(\pi - 2)$

2.7 $4P$

2.8 $A = 9$, $B = 8$, $C = 2$

2.9 $90°$

2.10 $x = 10$

2.11 10–uholník

2.12 $x^2 + ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}$

3.1 $\frac{7}{36}$

3.2 177

3.3 $\frac{2004}{2003\cdot 2004+1}$

3.4 $7\sqrt{2}$

3.5 719

3.6 969

3.7 13

3.8 2005!

3.9 $\frac{1}{4}$

3.10 499

3.11 1

3.12 nie je to možné